NEUE ABSCHÄTZUNGEN ZUR KONFORMEN ABBILDUNG EIN- UND MEHRFACH ZUSAMMENHÄNGENDER BEREICHE

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

HELMUT GRUNSKY
AUS AALEN IN WÜRTTEMBERG

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 9. JUNI 1932
TAG DER PROMOTION: 25. JULI 1932

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

508

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH
PROFESSOR DR. I. SCHUR

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 1

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden einige den Bieberbachschen Flächensätzen verwandte Sätze entwickelt, sowie einige Abschätzungen, die dem Gedankenkreis der Verzerrungs- und Drehungssätze angehören. Bei den erstgenannten Sätzen wird eine scharfe untere Schranke angegeben nicht für einen Flächeninhalt, sondern für die Größe

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \lg r\, d\varphi \tag{1}$$

(wo r, φ die Polarkoordinaten der Randpunkte eines Bereiches sind) für alle Bildbereiche, die aus einem gegebenen endlich vielfach zusammenhängenden Bereich durch gewisse eindeutige und reguläre oder meromorphe Funktionen hervorgehen.

Die weiteren obengenannten Abschätzungen gehen über die bekannten Verzerrungs- und Drehungssätze insofern hinaus, als nicht nur eine Abschätzung von Betrag und Amplitude einer Ableitung oder eines Funktionswertes, sondern eine allseitige Abschätzung des Logarithmus der betreffenden Größe gesucht wird. Es gelingt in einigen Fällen eine allseitig genaue Abschätzung.

Der Gedanke, nach dem die grundlegenden Abschätzungen gewonnen werden, sei an dem einfachsten Beispiel erläutert.

$$f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots$$

sei im abgeschlossenen Einheitskreis regulär und bis auf $\zeta = 0$ nullstellenfrei, und es sei $a_1 \neq 0$. Man bilde die im Einheitskreis reguläre Funktion

$$\lg F(\zeta) = \lg \frac{f(\zeta)}{\zeta}. \tag{2}$$

Der Flächeninhalt des Bildes, das $\lg F(\zeta)$ vom Einheitskreis entwirft, ist nicht negativ und verschwindet nur, falls $F(\zeta) = \text{const}\ (\neq 0)$.

Setzen wir $\quad F(\zeta) = Re^{i\Phi};\ f(\zeta) = re^{i\varphi};\ \zeta = \varrho e^{i\vartheta},$

so ist dieser Flächeninhalt $\int\limits_{|\zeta|=1} \lg R\, d\Phi = \int\limits_{|\zeta|=1} \lg r\, d\varphi - \int\limits_{|\zeta|=1} \lg R\, d\vartheta \geqq 0.$

Nach der POISSONschen Integralformel ist aber $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \lg R\, d\vartheta = \lg|a_1|$,

und man erhält

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \lg r\, d\varphi\right) \geqq |a_1|. \tag{3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur für $f(\zeta) = a_1\zeta$ bei beliebigem $a_1 \neq 0$. Die enge Verwandtschaft dieser Abschätzung mit dem ersten BIEBERBACHschen Flächensatze liegt auf der Hand. (Vgl. § 8, Satz 7.)

Dieser einfache Gedankengang wird nun weitgehend verallgemeinert. Man wird so zu einer umfassenden Formel geführt, die als Spezialfälle gewisse den BIEBERBACHschen Flächensätzen verwandte Sätze enthält, und aus der sich nun Verzerrungssätze und ähnliche ungefähr auf analoge Weise gewinnen lassen wie aus dem zweiten Flächensatze.

Literaturverzeichnis.

(1) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., 2. Bd. (1931). An Originalliteratur zitieren wir hier nur, was mit dem Folgenden in engerem Zusammenhang steht.

(2) L. Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rendiconti Palermo **38** (1914), 98—112.

(3) T. Kubota, Über konforme Abbildungen. I. Science Reports Tohoku University **9** (1920), 473—490.

(4) L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsberichte Akad. Berlin **1916**, 941—955.

(5) L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung. Math. Ann. **77** (1916), 153—172.

(6) G. Faber, Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung. Sitzungsberichte Akademie München **1916**, 39—42.

(7) H. Grötzsch, Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II. Berichte Akad. Leipzig **80** (1928), 367—376; 497—502.

(8) L. Bieberbach, Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. Math. Zeitschrift **4** (1919), 295—305.

(9) M. Kössler, Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach. Jahresbericht D. M. V. **41** (1931), 80—82.

(10) H. Grunsky, Anmerkung zur Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach durch M. Kössler. Jahresbericht D. M. V. **42** (1932), 71—73.

(11) K. Löwner, Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises. Math. Zeitschrift **3** (1919), 65—77.

(12) P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. IV. Acta math. **41** (1918), 305—344.

(13) H. Grötzsch, Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. I, II, III. Berichte Akad. Leipzig **81** (1929), 38—47, 217—221; **83** (1931), 283—297.

§ 1. Einige spezielle Abbildungsfunktionen.

$\mathfrak{B}$ sei ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich der ζ-Ebene. Sein Rand K bestehe aus n ganz im Endlichen liegenden geschlossenen analytischen Kurven $K_1, \ldots K_n$, deren keine durch den Nullpunkt gehe; (punktförmige Randkomponenten sind also ausgeschlossen).

Von den im folgenden auftretenden Funktionen setzen wir ein für alle Male voraus, daß sie in $\mathfrak{B}$ eindeutig und bis auf endlichviele Pole regulär seien, ferner auch nur endlichviele Nullstellen besitzen. Weiter setzen wir zunächst voraus, daß sie auch auf dem Rande regulär und daselbst frei von Nullstellen seien. Von einem Teil dieser Voraussetzungen werden wir uns später wieder befreien.

Ist die Umlaufszahl des durch die Funktion $f(\zeta)$ von K_ν entworfenen Bildes um den Nullpunkt π_ν, so sagen wir dafür kurz: $f(\zeta)$ besitzt auf K_ν die Umlaufszahl π_ν.

Es sei nun $\mathfrak{g}(\zeta; z)$ in $\mathfrak{B}$ als Funktion von ζ regulär, eindeutig und von Null verschieden bis auf den Punkt z, wo sie eine Nullstelle erster Ordnung besitze. Ferner sei $\mathfrak{g}$ auf jeder Randkomponente K_ν von konstantem (aber im allgemeinen noch von ν abhängendem) Betrag (der nicht willkürlich vorgeschrieben werden kann, sondern durch die andern Eigenschaften von $\mathfrak{g}$ mitbestimmt ist). Bei z sei sie normiert durch die Forderung, daß der erste Koeffizient ihrer LAURENT-Entwicklung gleich Eins sei; d. h. also, falls z endlich ist: $\mathfrak{g}'(z; z) = 1$ (der Strich bedeutet Differentiation nach dem ersten Argument), falls $z = \infty$: res $\mathfrak{g}(z; z) = 1$ (res $f(z)$ bedeutet das Residuum von $f(\zeta)$ an der Stelle z). Zwei Funktionen der geschilderten Art können sich noch durch die Umlaufszahlen auf den einzelnen Randkurven voneinander unterscheiden. Werden auch diese für alle K_ν vorgeschrieben (natürlich so, daß ihre Summe gleich Eins ist, da ja der Bildbereich den Nullpunkt einfach bedeckt), so gibt es jeweils höchstens eine solche Funktion; denn der Quotient $\gamma(\zeta)$ zweier solcher ist in $\mathfrak{B}$ regulär und besitzt auf jedem K_ν konstanten Betrag und die Umlaufszahl Null um den Nullpunkt. Daraus folgt, daß das Bild K'_ν, das $\gamma(\zeta)$ von K_ν entwirft, auch in bezug auf jeden anderen Punkt die Umlaufszahl Null hat. Denn wäre a ein Punkt, für den das nicht der Fall ist, so müßte die Strecke $\overline{o\,a}$ K'_ν schneiden, ebenso aber auch

ihre Verlängerung über a hinaus bevor ∞ erreicht ist, da sie ja wieder zu Punkten kommen muß, in bezug auf die die Umlaufszahl Null ist. Beides schließt sich aber aus, da K_ν' ganz auf einem Kreis um den Nullpunkt liegt. Also hat der durch $\gamma(\zeta)$ entworfene Bildbereich überhaupt keine inneren Punkte, $\gamma(\zeta)$ ist eine Konstante, und zwar gleich Eins wegen $\mathfrak{g}'(z;z) = 1$.

Mit $\mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta;z)$ wollen wir diejenige unter den Funktionen $\mathfrak{g}$ bezeichnen, die auf K_ν die Umlaufszahl Eins, auf allen anderen Randkurven dagegen die Umlaufszahl Null besitzt. Sie bildet $\mathfrak{B}$ auf einen eventuell längs konzentrischer Kreisbogen aufgeschlitzten Kreis um den Nullpunkt ab.[1]) In Anbetracht der Einzigkeit der Funktion $\mathfrak{g}(\zeta;z)$ mit Umlaufszahl π_ν auf $K_\nu (\nu = 1 \ldots n)$ ist

$$\mathfrak{g}(\zeta;z) = \prod_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta;z))^{\pi_\nu}. \tag{4}$$

Denn die rechtsstehende Funktion besitzt ja gerade die für $\mathfrak{g}(\zeta;z)$ charakteristischen Eigenschaften. Damit ist die Existenz eines beliebigen $\mathfrak{g}(\zeta;z)$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu = 1$ sichergestellt.

In einer ω-Ebene denken wir uns das System aller logarithmischen Spiralen mit dem Nullpunkt als asymptotischem Punkt und einer festen Neigung α. Unter der Neigung einer logarithmischen Spirale verstehen wir dabei den Tangens des (nach Definition jener Kurve konstanten) Winkels, den sie gegen die Strahlen vom asymptotischen Punkt aus bildet. Auch $\alpha = \infty$ lassen wir zu; ihm entsprechen die Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Für $\alpha = 0$ erhalten wir die Strahlen vom Nullpunkt aus. Bei endlichem α ist unsere Kurvenschar durch die Gleichung

$$\operatorname{amp} \omega - \alpha \lg |\omega| = c \tag{5}$$

dargestellt. Zwei Werten der Konstanten c, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, entspricht dieselbe Spirale. Durch jeden von Null und Unendlich verschiedenen Punkt der Ebene geht genau eine unserer Kurven. Durch die Funktion $\lg \omega$ wird die Kurvenschar (5) auf die Schar der Geraden der Neigung α abgebildet.

Liegen die beiden Punkte ω_1, ω_1' auf derselben Spirale (5), so folgt aus dieser Gleichung (bei passender Normierung der Amplituden)

$$\operatorname{amp} \frac{\omega_1}{\omega_1'} - \alpha \lg \left| \frac{\omega_1}{\omega_1'} \right| = 0 \tag{6}$$

1) Den Beweis ihrer Existenz s. z. B. bei Koebe Lit.-Verz. (12), S. 329.

und umgekehrt; also gehören auch die Punkte $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_1'}$ derselben Spirale an (natürlich im allgemeinen einer anderen als das Paar ω_1, ω_1'). Gilt auch für ω_2, ω_2' die zu (6) analoge Gleichung, so folgt durch Addition sofort, daß auch $\omega_1 \cdot \omega_2$ und $\omega_1' \cdot \omega_2'$ auf ein und derselben Spiralen liegen. Es gilt also:

Durchlaufen ω_1 und ω_2 je eine der Spiralen (5), so auch $\frac{1}{\omega_1}$ und $\omega_1 \cdot \omega_2$.

Selbstverständlich gilt dies auch für $\alpha = \infty$, wo (5) seinen Sinn verliert. — Ebenso leicht zeigt man:

Gehören ω_1 und ω_1' derselben Spirale an, so gehört dieser auch einer der beiden Punkte $\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_1'}$ an.

Indem wir die ω-Ebene längs irgendwelcher endlicher und den Nullpunkt nicht enthaltender Bogen unserer Spiralen aufschlitzen, erhalten wir einen Bereich, den wir mit $\mathfrak{B}_\alpha$ bezeichnen wollen. Werden in dem ursprünglich gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ irgend zwei verschiedene Punkte z und z' vorgegeben, so gibt es genau *eine* Funktion

$$\omega = j_\alpha(\zeta; z, z'),$$

die $\mathfrak{B}$ auf einen derartigen Bereich $\mathfrak{B}_\alpha$ abbildet, und die den Punkt z in $\omega = 0$, z' in $\omega = \infty$ überführt, und die bei z' durch die Forderung normiert ist, daß ihr erster LAURENT-Koeffizient gleich Eins sei.[2]) Den ersten LAURENT-Koeffizienten bei z bezeichnen wir mit j_α.

Die Funktion $\omega = j_\alpha(\zeta; z, z')$ ist übrigens allein charakterisiert durch ihr Verhalten auf dem Rande (das in dem Fehlen von Polen und Nullstellen und der Gültigkeit von (5) auf jeder Randkurve besteht) und das in den Punkten z und z'; die Schlichtheit braucht nicht besonders gefordert zu werden.[2]) Insbesondere folgt daraus noch, daß der Wert der Konstanten in (5) für jeden Schlitz des Bildbereiches, sowie dessen Endpunkte nicht etwa willkürlich gewählt werden können, sondern sich aus der Gestalt von $\mathfrak{B}$ und der Wahl der Punkte z und z' zwangsläufig ergeben.

Ferner folgt die Beziehung

$$j_\alpha(\zeta; z, z') = \frac{j_\alpha}{j_\alpha(\zeta; z', z)}. \tag{7}$$

Denn beide Funktionen haben dieselbe Nullstelle, denselben Pol und dieselbe Normierung bei letzterem, und beide bilden jede Randkomponente auf ein Stück einer logarithmischen Spirale der Neigung α ab; für die rechtsstehende Funktion folgt das aus dem oben Ge-

[2]) Siehe Koebe Lit.-Verz. (12). insbesondere S. 336—338.

sagten. Ebenso zeigt man, daß, wenn z_0 einen beliebigen von z und z verschiedenen Punkt aus $\mathfrak{B}$ bezeichnet, gilt

$$\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z') = \mathfrak{j}_\alpha(z'; z_0, z)\frac{\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0, z')}{\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0, z)}. \tag{8}$$

Endlich ist noch

$$\mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, z') = \frac{1}{\mathfrak{g}(z'; z)}\frac{\mathfrak{g}(\zeta; z)}{\mathfrak{g}(\zeta; z')}, \tag{9}$$

wenn die beiden Funktionen $\mathfrak{g}(\zeta; z)$ und $\mathfrak{g}(\zeta; z')$ auf jedem K_ν dieselbe Umlaufszahl haben.

Die Formeln (4), (7), (8) und (9) drücken lineare Abhängigkeiten zwischen gewissen Funktionen $\lg \mathfrak{g}(\zeta; z)$, $\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')$ aus. Es ist für das Folgende wichtig, alle solche Abhängigkeiten aufzuweisen. Wir wollen das in diesem Paragraphen tun, müssen aber den Nachweis, daß keine weiteren solchen Abhängigkeiten bestehen, noch schuldig bleiben. Wir werden ihn in § 3 nachholen.

Wir bilden die beiden Funktionen

$$\mathfrak{p}(\zeta; z, z') = \sqrt{\mathfrak{j}_0(\zeta; z, z') \cdot \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, z')} \tag{10}$$

$$\mathfrak{q}(\zeta; z, z') = \sqrt{\frac{\mathfrak{j}_0(\zeta; z, z')}{\mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, z')}}, \tag{11}$$

wobei wir beidemal denjenigen Zweig der Quadratwurzel auswählen, für den $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ bei z' den ersten LAURENT-Koeffizienten Eins erhält. $\mathfrak{p}$ besitzt wieder bei z eine Nullstelle, bei z' einen Pol erster Ordnung und ist eindeutig in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{q}$ ist in $\mathfrak{B}$ regulär, nullstellenfrei und eindeutig mit $\mathfrak{q}(z'; z, z') = 1$. Wir können nun umgekehrt $\mathfrak{j}_0$ und $\mathfrak{j}_\infty$ durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ausdrücken. Es ist

$$\lg \mathfrak{j}_0 = \lg \mathfrak{p} + \lg \mathfrak{q}, \qquad \lg \mathfrak{j}_\infty = \lg \mathfrak{p} - \lg \mathfrak{q}. \tag{12, 13}$$

Aber auch jedes andere $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')$ läßt sich in ähnlicher Weise durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ darstellen. Wir nehmen in (12) beiderseits den Imaginärteil, in (13) beiderseits den Realteil, und zwar jeweils für Argumentwerte ζ auf der Randkurve K_ν. Daselbst besitzt $\lg \mathfrak{j}_0$ konstanten Imaginärteil, den wir mit c_ν bezeichnen, und $\lg \mathfrak{j}_\infty$ konstanten Realteil c_ν'. Somit erhalten wir[3])

$$\begin{aligned} \Im(\lg \mathfrak{q}^{(\nu)}) &= -\Im(\lg \mathfrak{p}^{(\nu)}) + c_\nu, \\ \Re(\lg \mathfrak{q}^{(\nu)}) &= \Re(\lg \mathfrak{p}^{(\nu)}) - c_\nu'. \end{aligned}$$

Der obere Index bei $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ soll dabei andeuten, daß wir uns auf K_ν befinden. Wir können beide Formeln in die eine zusammenfassen

$$\lg \mathfrak{q}^{(\nu)} = \overline{\lg \mathfrak{p}^{(\nu)}} + C_\nu, \tag{14}$$

3) $\Re(\ldots)$ und $\Im(\ldots)$ bezeichnen den reellen bzw. imaginären Teil der in der Klammer stehenden Größe.

wo C_ν eine Konstante bezeichnet. Hieraus läßt sich leicht die angekündigte Darstellung von j_α gewinnen, nämlich

$$\lg j_\alpha(\zeta; z, z') = \lg p(\zeta; z, z') + t \lg q(\zeta; z, z'), \tag{15}$$

wobei folgender Zusammenhang zwischen t und α besteht:

$$t = \tau + i\tau' = e^{i\vartheta} = \frac{(1+i\alpha)^2}{1+\alpha^2};$$
$$\tau = \cos\vartheta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}; \quad \tau' = \sin\vartheta = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \tag{16}$$

oder umgekehrt:

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{1-\tau}{\tau'} = \frac{\tau'}{1+\tau}. \tag{17}$$

Die beiden Seiten von (15) stimmen nämlich zunächst hinsichtlich der Singularitäten und der Normierung überein. Ferner können wir rechts für Werte von ζ auf K_ν (14) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &\lg p^{(\nu)} + t \lg q^{(\nu)} = \lg p^{(\nu)} + e^{i\vartheta}\overline{\lg p^{(\nu)}} + C_\nu e^{i\vartheta} \\ &= e^{i\frac{\vartheta}{2}}\left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \lg p^{(\nu)} + e^{i\frac{\vartheta}{2}}\overline{\lg p^{(\nu)}}\right) + C_\nu e^{i\vartheta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Klammer ist reell, also liegen die Werte der rechten Seite von (15) für $\zeta \subset K$ auf einer Geraden mit dem Neigungswinkel $\frac{\vartheta}{2}$, genau so, wie das für die Werte der linken Seite der Fall ist. Außerdem ist die rechte Seite von (15) eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ ($\lg q$ ist ja eindeutig; wir wählen den bei Eins verschwindenden Zweig des Logarithmus); sie besitzt also genau die nach S. 99 für die linke Seite charakteristischen Eigenschaften. Aus (15), (10) und (11) erkennt man ferner, daß sich jedes $\lg j_\alpha(\zeta; z, z')$ aus $\lg j_0(\zeta; z, z')$ und $\lg j_\infty(\zeta; z, z')$ linear kombinieren läßt.

Für einfach zusammenhängende Bereiche einfacher Gestalt lassen sich die hier betrachteten Funktionen leicht explizit angeben. Legen wir zunächst den Einheitskreis zugrunde, so ist

$$g(\zeta; z) = c\frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta} \quad \text{mit} \quad c = 1 - |z|^2 \tag{19}$$

$$j_0(\zeta; z, z') = c\frac{\zeta - z}{\zeta - z'}\,\frac{1 - \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}'\zeta} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{z' - z}\,\frac{1 - |z'|^2}{1 - \bar{z}z'} \tag{20}$$

$$j_\infty(\zeta; z, z') = c\frac{\zeta - z}{\zeta - z'}\,\frac{1 - \bar{z}'\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{z' - z}\,\frac{1 - \bar{z}z'}{1 - |z'|^2} \tag{21}$$

$$p(\zeta; z, z') = c\frac{\zeta - z}{\zeta - z'} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{z' - z}, \tag{22}$$

$$q(\zeta; z, z') = c\frac{1 - \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}'\zeta} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1 - |z'|^2}{1 - \bar{z}z'} \tag{23}$$

$$\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z') = c\,\frac{\zeta - z}{\zeta - z'}\left(\frac{1 - \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}'\zeta}\right)^t \text{ mit } c = \frac{1}{z' - z}\left(\frac{1 - |z'|^2}{1 - \bar{z}z'}\right)^t$$

(24)

$$\text{und } t = \frac{(1 + i\alpha)^2}{1 + \alpha^2}.$$

Genau dieselben Formeln gelten, wenn $\mathfrak{B}$ das Äußere des Einheitskreises ist, und z und z' im Endlichen liegen. Ist dagegen $z' = \infty$, so ist

(25) $\mathfrak{j}_0(\zeta; z, \infty) = (\zeta - z)\left(1 - \frac{1}{\bar{z}\zeta}\right)$, $\mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, \infty) = \bar{z}\zeta\,\frac{\zeta - z}{\bar{z}\zeta - 1}$ (26)

(27) $\mathfrak{p}(\zeta; z, \infty) = \zeta - z$, $\mathfrak{q}(\zeta; z, \infty) = 1 - \frac{1}{\bar{z}\zeta}$ (28)

(29) $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, \infty) = (\zeta - z)\left(1 - \frac{1}{\bar{z}\zeta}\right)^t$, $t = \frac{(1 + i\alpha)^2}{1 + \alpha^2}$.

Besonders einfache Ausdrücke erhält man, wenn man als $\mathfrak{B}$ das Äußere eines Kreises $\mathfrak{K}$ um den Punkt Eins wählt mit einem Radius kleiner als Eins, und $z = 0$, $z' = \infty$ setzt. Bezeichnet man dann mit q das Spiegelbild des Nullpunktes an $\mathfrak{K}$, so findet man leicht

(30) $\mathfrak{p}(\zeta; 0, \infty) = \zeta$, $\mathfrak{q}(\zeta; 0, \infty) = \frac{\zeta - q}{\zeta - 1}$, (31)

(32) $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; 0, \infty) = \zeta\left(\frac{\zeta - q}{\zeta - 1}\right)^t$, $t = \frac{(1 + i\alpha)^2}{1 + \alpha^2}$.

Der Radius von $\mathfrak{K}$ ist $\sqrt{1 - q}$. Die durch $\mathfrak{q}$ vermittelte Abbildung vertauscht das Innere und das Äußere von $\mathfrak{K}$; sie kann erzeugt werden durch eine Spiegelung an der reellen Achse und an $\mathfrak{K}$.

§ 2. Verallgemeinerungen der GREEN schen Integralformel.

Es sei $F(\zeta) = U + iV$

regulär und eindeutig in $\mathfrak{B}$. Dann ist nach einem bekannten Residuensatz

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta)\,\frac{\partial \lg \mathfrak{g}(\zeta; z)}{\partial \zeta}\,d\zeta,$$

und diese Formel gilt, gleichgültig, ob z endlich oder der unendlich ferne Punkt ist. Ist s die Bogenlänge auf K, $\zeta = \zeta(s)$ die Gleichung von K, so folgt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta(s))\,\frac{\partial \lg \mathfrak{g}(\zeta(s); z)}{\partial s}\,ds$$

oder

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta)\,d \lg \mathfrak{g}(\zeta; z).$$

Wegen $|\mathfrak{g}| = \text{const}$ für jedes K, ist auf K

$$d \lg g(\zeta; z) = i\, d \operatorname{amp} g(\zeta; z),$$

und es folgt $$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_K F(\zeta)\, d \operatorname{amp} g(\zeta; z).$$

Nehmen wir hier beiderseits den Realteil, so erhalten wir die Formel

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_K U(\zeta)\, d \operatorname{amp} g(\zeta; z), \tag{33}$$

die im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereichs im wesentlichen mit der Greenschen Integralformel identisch ist.[4])

Ganz ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} F(z) - F(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_K F(\zeta) \frac{\partial \lg j_\alpha(\zeta; z, z')}{\partial \zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K F(\zeta)\, d \lg j_\alpha(\zeta; z, z') \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K F(\zeta)\, d(\lg |j_\alpha| + i \operatorname{amp} j_\alpha). \end{aligned}$$

Hier ist aber, da auf jedem K_ν (5) mit $\omega = j_\alpha$ gilt,

$$d \operatorname{amp} j_\alpha - \alpha\, d \lg |j_\alpha| = 0, \tag{34}$$

wobei natürlich $\alpha = \infty$ auszunehmen ist. Nun folgt

$$F(z) - F(z') = \frac{1 + i\alpha}{2\pi i} \int_K F(\zeta)\, d \lg |j_\alpha(\zeta; z, z')|.$$

Wir multiplizieren beiderseits mit $\frac{1}{1 + i\alpha} = \frac{1+\tau}{2} - i\,\frac{\tau'}{2}$ (vgl. (16)) und nehmen den Realteil; wir erhalten:

$$\frac{1}{2\pi} \int_K V(\zeta)\, d \lg |j_\alpha(\zeta; z, z')| = \frac{1+\tau}{2} (U(z) - U(z')) + \frac{\tau'}{2} (V(z) - V(z')), \tag{35}$$

eine Formel, die trivialerweise auch für $\alpha = \infty$ gilt, da dann $d \lg |j_\alpha| = 0$, $\tau = -1$, $\tau' = 0$ und also beiderseits Null steht.

Wir multiplizieren ferner (35) mit $\alpha = \frac{\tau'}{1+\tau} = \frac{1-\tau}{\tau'}$

und führen gemäß (34) $d \operatorname{amp} j_\alpha$ an Stelle von $d \lg |j_\alpha|$ ein; außerdem ersetzen wir noch U durch V, V durch $-U$; so finden wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_K U(\zeta)\, d \operatorname{amp} j_\alpha(\zeta; z, z') = \frac{1-\tau}{2} (U(z) - U(z')) - \frac{\tau'}{2} (V(z) - V(z')). \tag{36}$$

4) Vgl. deren Herleitung bei Bieberbach, Lit.-Verz. (1), S. 56—58.

Auch diese Formel gilt noch für $\alpha = \infty$, wie aus (9) und aus (33) sofort zu ersehen ist.

Indem wir ferner auf die linke Seite von (35) partielle Integration anwenden und beachten, daß beim Durchlaufen eines K_ν sowohl $V(\zeta)$ als auch $|\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')|$ zum Ausgangswert zurückkehrt, finden wir

$$(37)\quad \frac{1}{2\pi}\int_K \lg|\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')|\,dV(\zeta) = -\frac{1+\tau}{2}(U(z)-U(z')) - \frac{\tau'}{2}(V(z)-V(z')).$$

Für eine spätere bequemere Anwendung addieren wir die beiden letzten Formeln zu

$$(38)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_K U(\zeta)\,d\,\operatorname{amp}\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z') + \lg|\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')|\,dV(\zeta)\\ &\quad = -\tau(U(z)-U(z')) - \tau'(V(z)-V(z')).\end{aligned}$$

§ 3. Linearkombinationen der Funktionen lg $\mathfrak{j}$ und lg $\mathfrak{g}$.

Jetzt können wir auch den Nachweis erbringen, daß außer den in § 1 aufgestellten keine weiteren linearen Abhängigkeiten zwischen Funktionen lg $\mathfrak{g}$ und lg $\mathfrak{j}_\alpha$ bestehen. Wir bilden eine beliebige Linearkombination solcher Funktionen

$$(39)\quad \lg\mathfrak{f}(\zeta) = \sum_\lambda k_\lambda \lg\mathfrak{g}(\zeta; z_\lambda) + \sum_\varkappa l_\varkappa \lg\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}(\zeta; z_\varkappa, z'_\varkappa) + \lg C,$$

wo $C \neq 0$ eine Konstante bedeutet; für jedes $\mathfrak{g}$ sei eine wohlbestimmte der nach S. 97 möglichen verschiedenen Funktionen gewählt; die z_λ, $z_\varkappa$, $z'_\varkappa$ sind irgendwelche festen Punkte aus $\mathfrak{B}$, die für $\mathfrak{f}(\zeta)$ bestimmenden Punkte; abgesehen davon, daß natürlich stets $z_\varkappa \neq z'_\varkappa$, brauchen sie nicht alle voneinander verschieden zu sein; k_λ und $l_\varkappa$ sind irgendwelche Konstanten, für die zunächst auch komplexe Werte zugelassen sind.

Unter Benutzung der in § 1 aufgestellten linearen Abhängigkeiten läßt sich lg $\mathfrak{f}(\zeta)$ in mannigfacher Weise in der Form (39) schreiben. Wir wollen eine Schreibweise besonders hervorheben. Mit z_0 bezeichnen wir einen von allen z_λ, $z_\varkappa$, $z'_\varkappa$ verschiedenen Punkt aus $\mathfrak{B}$ und setzen gemäß (9) und (8)

$$(40)\quad \begin{aligned}\lg\mathfrak{g}(\zeta; z_\lambda) &= \lg\mathfrak{g}(\zeta; z_0) - \lg\mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z_\lambda) + \lg c\\ \lg\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}(\zeta; z_\varkappa, z'_\varkappa) &= \lg\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}(\zeta; z_0, z'_\varkappa) - \lg\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}(\zeta; z_0, z_\varkappa) + \lg c',\end{aligned}$$

wo c und c' Konstanten sind. Die bestimmenden Punkte wollen wir jetzt mit z_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) bezeichnen, wobei jeder nur einmal angeschrieben sei, gleichgültig wie oft er unter den z_λ, $z_\varkappa$, $z'_\varkappa$ vorkommt. Dann drücken wir noch gemäß dem in § 1 Gesagten lg $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0, z_\mu)$

durch $\lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, z_\mu)$ und $\lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z_\mu)$ aus und nehmen aus einem Grunde, der sofort deutlich werden wird, noch $\lg \mathfrak{j}_1(\zeta; z_0, z_\mu)$ hinzu:

$$\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0, z_\mu) = h_{\mu 0} \lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, z_\mu) + h_{\mu 1} \lg \mathfrak{j}_1(\zeta; z_0, z_\mu) + h_{\mu\infty} \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z_\mu); \tag{41}$$

endlich setzen wir gemäß (4)

$$\lg \mathfrak{g}(\zeta; z_0) = \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu^* \lg \mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta; z_0), \tag{42}$$

wo π_ν^* die Umlaufszahl des links stehenden $\mathfrak{g}$ auf K_ν ist. Führen wir nun (40) mit (41) und (42) in (39) ein, so erhalten wir $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ in der Gestalt

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = \lg C' + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lg \mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta; z_0) + \sum_{\mu} (l_{\mu 0} \lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, z_\mu) + l_{\mu 1} \lg \mathfrak{j}_1(\zeta; z_0, z_\mu) + l_{\mu\infty} \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z_\mu)), \tag{43}$$

wo C' wieder eine Konstante ist. Für die k_ν, $l_{\mu 0}$, $l_{\mu 1}$, $l_{\mu\infty}$ sind zunächst beliebige komplexe Werte zugelassen. Verlangen wir aber, daß $\mathfrak{f}(\zeta)$ eindeutig sei, so müssen die k_ν und $l_{\mu 0} + l_{\mu 1} + l_{\mu\infty} = \lambda_\mu$ reelle ganze Zahlen sein. Auf Grund des in § 1 Gesagten können wir leicht zeigen, daß $l_{\mu 0}$, $l_{\mu 1}$, $l_{\mu\infty}$ einzeln als reell vorausgesetzt werden dürfen. Sind sie nämlich komplex, so erhalten wir aus (15) (wenn wir der Kürze halber den Index μ und die Argumente unterdrücken)

$$l_0 \lg \mathfrak{j}_0 + l_1 \lg \mathfrak{j}_1 + l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty = \lambda \lg \mathfrak{p} + (l_0 - l_\infty + i l_1) \lg \mathfrak{q}.$$

Setzen wir $l_0 - l_\infty + i l_1 = \delta' + i\delta''$ (δ', δ'' reell)

und $l_1' = \delta''$; $l_0' = \frac{\lambda + \delta' - \delta''}{2}$; $l_\infty' = \frac{\lambda - \delta' - \delta''}{2}$,

so erhalten wir

$$\begin{aligned} l_0 \lg \mathfrak{j}_0 + l_1 \lg \mathfrak{j}_1 + l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty &= \lambda \lg \mathfrak{p} + (l_0' - l_\infty' + i l_1') \lg \mathfrak{q} \\ &= (l_0' + l_\infty' + l_1') \lg \mathfrak{p} + (l_0' - l_\infty' + i l_1') \lg \mathfrak{q} \\ &= l_0' \lg \mathfrak{j}_0 + l_1' \lg \mathfrak{j}_1 + l_\infty' \lg \mathfrak{j}_\infty, \end{aligned}$$

wo die neuen Parameter reell sind. Natürlich ist z_0 auf Grund von (43) nur scheinbar bestimmender Punkt für $\mathfrak{f}(\zeta)$. Wir definieren diesen Begriff jetzt schärfer als S. 104 so: z ist bestimmender Punkt für $\mathfrak{f}(\zeta)$, wenn es keine Darstellung von $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ der Form (39) gibt, in der er nicht auftritt. Es ist natürlich sehr wohl möglich, daß von den ursprünglich gewählten Punkten z_λ, $z_\varkappa$, $z_\varkappa'$ einige nur scheinbar bestimmende Punkte sind.

Im Gegensatz zu der zu Beginn des Paragraphen formulierten Behauptung nehmen wir nun an, $\mathfrak{f}(\zeta)$ sei eine Konstante. Dann müssen zunächst in (43) alle $k_\nu = 0$ sein, da $\mathfrak{f}(\zeta)$ sonst auf K_ν die

Umlaufszahl k_ν hätte. Hat ferner $F(\zeta)$ dieselbe Bedeutung, wie im vorigen Paragraphen, und ist noch $F(z_0) = 0$, so folgt einerseits aus $\mathfrak{f}(\zeta) = \text{const}$, andererseits aus (38) und (43)

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_K U(\zeta)\, d \operatorname{amp} \mathfrak{f}(\zeta) + \lg|\mathfrak{f}(\zeta)|\, dV(\zeta)$$
$$= \sum_\mu (l_{\mu\infty} - l_{\mu 0})\, U(z_\mu) + \sum_\mu l_{\mu 1} V(z_\mu).$$

Da das für alle $F(\zeta)$ gilt, so muß $l_{\mu\infty} - l_{\mu 0} = l_{\mu 1} = 0$ sein. Andererseits muß aber, damit $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ regulär in z_μ ist, $l_{\mu 0} + l_{\mu 1} + l_{\mu\infty} = 0$ sein; also ist $l_{\mu 0} = l_{\mu 1} = l_{\mu\infty} = 0$, so daß also in (43) rechts die $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{j}$ überhaupt nicht auftreten, womit die Behauptung bewiesen ist.

Daraus folgt zunächst, daß die Darstellung von $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ in der Form (43) (bei festem z_0) eindeutig ist. An Stelle von z_0 hätten wir auch einen anderen Punkt z_0' wählen können. Tun wir dies nachträglich, indem wir, wieder nach (9) und (8), setzen

$$\lg \mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta; z_0) = \lg \mathfrak{g}^{(\nu)}(\zeta; z_0') - \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0', z_0) + \lg c''$$
$$\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0, z_\mu) = \lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0', z_\mu) - \lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0', z_0) + \lg c''',$$

so müssen sich beim Einsetzen in (43) die $\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z_0', z_0)$ herausheben; daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Konstanten von (43):

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu + \sum_\mu l_{\mu\infty} = \sum_\mu l_{\mu 0} = \sum_\mu l_{\mu 1} = 0. \tag{44}$$

§ 4. Allgemeine Abschätzung von L nach unten.

Ist $F(\zeta)$ in $\mathfrak{B}$ regulär, eindeutig und nullstellenfrei, so ist auch

$$\frac{d}{d\zeta} \lg F(\zeta) = \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}$$

daselbst regulär und eindeutig. Mit $d\omega_\zeta$ bezeichnen wir ein Flächenelement von $\mathfrak{B}$. Mittels der GREENschen Integralformel formen wir das Flächenintegral

$$\iint_{\mathfrak{B}} \left| \frac{d}{d\zeta} \lg F(\zeta) \right|^2 d\omega_\zeta$$

auf ein Randintegral um. Es gilt allgemein für eine reellwertige Funktion $A(\zeta)$, für die die in Betracht kommenden Ableitungen und Integrale existieren, wenn wir

$$\zeta = \xi + i\eta; \quad A_\xi = \frac{\partial A}{\partial \xi}; \quad A_\eta = \frac{\partial A}{\partial \eta}$$

setzen und $\frac{\partial A}{\partial n}$ die Ableitung nach der inneren Normalen des Randes bedeutet:

$$(45) \qquad \iint_{\mathfrak{B}} (A_\xi^2 + A_\eta^2) d\omega_\zeta = -\iint_{\mathfrak{B}} A \Delta A \, d\omega_\zeta - \int_K A \frac{\partial A}{\partial n} ds.$$

Ist A Realteil einer analytischen Funktion, $C(\zeta) = A(\zeta) + i B(\zeta)$, so ist

$$A_\xi = \Re(C'(\zeta)); \quad A_\eta = B_\xi = \Im(C'(\zeta)),$$

also

$$A_\xi^2 + A_\eta^2 = |C'(\zeta)|^2.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von (45) verschwindet wegen $\Delta A = 0$, und im zweiten wird

$$-\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial B}{\partial s}.$$

Ist nun $C(\zeta) = \lg F(\zeta)$, so folgt, wenn wir noch

$$F(\zeta) = R e^{i\Phi} \qquad \text{setzen,}$$

$$\iint_{\mathfrak{B}} \left| \frac{d}{d\zeta} \lg F(\zeta) \right|^2 d\omega_\zeta = \int_K \lg R \, d\Phi. \qquad \text{Also ist}$$

$$(46) \qquad \int_K \lg R \, d\Phi \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $F(\zeta) = \text{const}$.

Diese Ungleichung ist nun einfach eine Aussage über jeden Bereich, der die Punkte Null und Unendlich nicht enthält; das Gleichheitszeichen gilt dabei nur, falls er auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist.

Nun sei $f(\zeta)$ eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige und bis auf endlich viele Pole $p_\varkappa$ reguläre Funktion mit den endlich vielen Nullstellen n_ι. Dabei sei jede dieser Stellen so oft angeschrieben, als ihre Vielfachheit beträgt. Wir bilden nun gemäß (39) oder (43) eine eindeutige Funktion $\mathfrak{f}(\zeta)$, und bestimmen dabei die verfügbaren Größen irgendwie so, daß $\mathfrak{f}(\zeta)$ mit $f(\zeta)$ hinsichtlich der Pole und Nullstellen, sowie der Umlaufszahlen π_ν auf allen K_ν übereinstimmt. Daß das auf unendlich viele Arten möglich ist, ist ohne weiteres ersichtlich. Insbesondere müssen die n_ι und die $p_\varkappa$ unter den bestimmenden Punkten vorkommen, und es muß in (43) $k_\nu = \pi_\nu$ sein. Auf Grund des in § 3 Ausgeführten wissen wir, daß wir schon in der speziellen Form (43) das allgemeinste $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ vor uns haben; trotzdem werden wir nachher, da das bequemer und für gewisse Anwendungen zweckmäßiger ist, mit der Darstellung (39) rechnen, wo wir jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit die k_λ und l_ν als reell voraussetzen dürfen.

Ferner bilden wir noch die Funktion

$$\mathfrak{f}^0(\zeta) = c\,\frac{\prod_\iota \mathfrak{g}(\zeta; n_\iota)}{\prod_\varkappa \mathfrak{g}(\zeta; p_\varkappa)}, \tag{47}$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante ist. $\mathfrak{f}^0(\zeta)$ erfüllt bei geeigneter Wahl der $\mathfrak{g}$ ebenfalls die an $\mathfrak{f}(\zeta)$ gestellten Forderungen und besitzt auf jedem K_ν konstanten Betrag $\mathfrak{r}_\nu^0$.

Mit a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^0$ bezeichnen wir den ersten LAURENT-Koeffizienten von $f(\zeta)$, $\mathfrak{f}(\zeta)$, $\mathfrak{f}^0(\zeta)$ bei $\zeta = z$ und die entsprechenden Größen bei einem mit irgendwelchen Indizes versehenen z werden durch Anhängen dieser Indizes an obige Buchstaben gekennzeichnet. Außerdem setzen wir noch

$$f(\zeta) = r e^{i\varphi};\quad \mathfrak{f}(\zeta) = \mathfrak{r} e^{i\varphi^*};\quad \mathfrak{f}^0(\zeta) = \mathfrak{r}^0 e^{i\varphi^{*0}};\quad \mathfrak{g}(\zeta; z_\lambda) = \mathfrak{g}_\lambda.$$

Die Funktion $$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\mathfrak{f}(\zeta)}$$

erfüllt nun die zu Anfang des Paragraphen gemachten Voraussetzungen. Es ist jetzt

$$\lg R = \lg r - \lg \mathfrak{r} = \lg r - \sum_\lambda k_\lambda \lg|\mathfrak{g}_\lambda| - \sum_\varkappa l_\varkappa \lg|\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}|$$

$$\Phi = \varphi - \varphi^* = \varphi - \sum_\lambda k_\lambda \operatorname{amp} \mathfrak{g}_\lambda - \sum_\varkappa l_\varkappa \operatorname{amp} \mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa},$$

und daher

$$\int_K \lg R\, d\Phi = \int_K \lg r\, d\varphi - \int_K \lg R\, d\varphi^* - \int_K \lg \mathfrak{r}\, d\Phi - \int_K \lg \mathfrak{r}\, d\varphi^*; \tag{48}$$

die drei letzten Glieder behandeln wir mittels der in § 2 aufgestellten Formeln weiter. Es ist zunächst

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \lg R\, d\varphi^*$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_\lambda k_\lambda \int_K \lg R\, d \operatorname{amp} \mathfrak{g}_\lambda + \frac{1}{2\pi}\sum_\varkappa l_\varkappa \int_K \lg R\, d \operatorname{amp} \mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \lg \mathfrak{r}\, d\Phi = \frac{1}{2\pi}\sum_\lambda k_\lambda \int_K \lg|\mathfrak{g}_\lambda|\, d\Phi + \frac{1}{2\pi}\sum_\varkappa l_\varkappa \int_K \lg|\mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}|\, d\Phi.$$

In der ersten Summe der letzten Formel verschwindet jedes Glied, da $\lg|\mathfrak{g}_\lambda|$ auf jedem K_ν konstant ist, und Φ beim Umlauf um ein K_ν zu seinem Ausgangswert zurückkehrt. Wir addieren die beiden letzten Gleichungen und fassen rechts zum selben $\varkappa$ gehörige Glieder zusammen. Dann wenden wir auf jedes einzelne Glied die Formel (33) bzw. (38) an, wo wir $U = \lg R$, $V = \Phi$ setzen; so erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \lg R\, d\varphi^* + \frac{1}{2\pi}\int_K \lg \mathfrak{r}\, d\Phi$$

(49)

$$= \sum_\lambda k_\lambda \lg |F(z_\lambda)| - \sum_\varkappa l_\varkappa \Big[\tau_\varkappa \lg \Big|\frac{F(z_\varkappa)}{F(z'_\varkappa)}\Big| + \tau'_\varkappa \operatorname{amp} \frac{F(z_\varkappa)}{F(z'_\varkappa)}\Big].$$

Hierbei ist $\tau_\varkappa = \frac{1-\alpha_\varkappa^2}{1+\alpha_\varkappa^2}$, $\tau'_\varkappa = \frac{2\alpha_\varkappa}{1+\alpha_\varkappa^2}$ (vgl. (16)) und

$$F(z_\lambda) = \frac{a_\lambda}{a_\lambda}; \quad \frac{F(z_\varkappa)}{F(z'_\varkappa)} = \frac{a_\varkappa}{a_\varkappa} : \frac{a'_\varkappa}{a'_\varkappa}. \tag{50}$$

Nun ist noch das letzte Glied in (48) auszuwerten. Es ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \lg \mathfrak{r}\, d\varphi^* = \frac{1}{2\pi}\int_K \lg \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^0}\, d\varphi^* + \frac{1}{2\pi}\int_K \lg \mathfrak{r}^0\, d\varphi^*$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_\lambda k_\lambda \int_K \lg \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^0}\, d \operatorname{amp} \mathfrak{g}_\lambda + \frac{1}{2\pi}\sum_\varkappa l_\varkappa \int_K \lg \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^0}\, d \operatorname{amp} \mathfrak{j}_{\alpha_\varkappa}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \lg \mathfrak{r}_\nu^0 \int_{K_\nu} d\varphi^*.$$

$\frac{1}{2\pi}\int_{K_\nu} d\varphi^*$ ist die Umlaufszahl von $\mathfrak{f}(\zeta)$ auf K_ν, die ja mit π_ν, derjenigen von $f(\zeta)$, übereinstimmen sollte. Auf die Glieder der beiden ersten Summen können wir jetzt (33) bzw. (36) anwenden, wobei $U = \lg |\mathfrak{F}(\zeta)|$, $V = \operatorname{amp} \mathfrak{F}(\zeta)$ mit $\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{\mathfrak{f}^0(\zeta)}$ zu setzen ist. Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \lg \mathfrak{r}\, d\varphi^* = \sum_\lambda k_\lambda \lg |\mathfrak{F}(z_\lambda)|$$

(51)

$$- \sum_\varkappa l_\varkappa \Big[\frac{\tau_\varkappa - 1}{2} \lg \Big|\frac{\mathfrak{F}(z_\varkappa)}{\mathfrak{F}(z'_\varkappa)}\Big| + \frac{\tau'_\varkappa}{2} \operatorname{amp} \frac{\mathfrak{F}(z_\varkappa)}{\mathfrak{F}(z'_\varkappa)}\Big] + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \lg \mathfrak{r}_\nu^0.$$

Hier ist ferner

$$\mathfrak{F}(z_\lambda) = \frac{\mathfrak{a}_\lambda}{\mathfrak{a}_\lambda^0}; \quad \frac{\mathfrak{F}(z_\varkappa)}{\mathfrak{F}(z'_\varkappa)} = \frac{\mathfrak{a}_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^0} : \frac{\mathfrak{a}'_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^{0\prime}}. \tag{52}$$

Setzen wir jetzt (49) mit (50) und (51) mit (52) in (48) ein und berücksichtigen (46), so erhalten wir als Schlußresultat

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_K \lg r\, d\varphi \geqq \sum_\lambda k_\lambda \lg \Big|\frac{a_\lambda}{\mathfrak{a}_\lambda^0}\Big|$$

(I)

$$- \sum_\varkappa l_\varkappa \Big[\tau_\varkappa \lg \Big|\frac{a_\varkappa}{a_\varkappa} : \frac{a'_\varkappa}{a'_\varkappa}\Big| + \frac{\tau_\varkappa - 1}{2} \lg \Big|\frac{\mathfrak{a}_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^0} : \frac{\mathfrak{a}'_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^{0\prime}}\Big|$$

$$+ \tau'_\varkappa \operatorname{amp}\Big(\frac{a_\varkappa}{a_\varkappa} : \frac{a'_\varkappa}{a'_\varkappa}\Big) + \frac{\tau'_\varkappa}{2} \operatorname{amp}\Big(\frac{\mathfrak{a}_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^0} : \frac{\mathfrak{a}'_\varkappa}{\mathfrak{a}_\varkappa^{0\prime}}\Big)\Big] + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \lg \mathfrak{r}_\nu^0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur, falls $f(\zeta) = \text{const}\, \mathfrak{f}(\zeta)$. Das letzte Glied rechts ist übrigens der Wert der Größe L für die Funktion $\mathfrak{f}^0(\zeta)$. Die rechts stehenden Amplituden besitzen wohlbestimmte Werte; $\operatorname{amp}\left(\frac{a_\varkappa}{a'_\varkappa} : \frac{a_\varkappa}{a'_\varkappa}\right)$ z. B. ist die Änderung der Amplitude von $F(\zeta)$ auf einem Wege von $z'_\varkappa$ nach $z_\varkappa$, und diese ist eindeutig.

Legen wir die spezielle Darstellung (43) von $\mathfrak{f}(\zeta)$ zugrunde, so heben sich wegen (44) alle auf z_0 bezüglichen Größen heraus und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\pi}\int_K \lg r\, d\varphi \\
&\geqq \sum_\mu \left[(l_{\mu 0} - l_{\mu\infty}) \lg \left|\frac{a_\mu}{a_\mu}\right| - \left(\frac{1}{2} l_{\mu 1} + l_{\mu\infty}\right) \lg \left|\frac{a_\mu}{a^0_\mu}\right| \right. \\
&\quad \left. + l_{\mu 1} \operatorname{amp} \frac{a_\mu}{a_\mu} + \frac{1}{2} l_{\mu 1} \operatorname{amp} \frac{a_\mu}{a^0_\mu}\right] + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \lg \mathfrak{r}^0_\nu .
\end{aligned} \tag{II}
$$

Wir wollen uns nun von einigen der zu Beginn von § 1 gemachten Voraussetzungen befreien. Diejenigen über $\mathfrak{B}$ können wir, abgesehen von der des endlich vielfachen Zusammenhanges, fallen lassen, indem wir nötigenfalls durch eine geeignete Hilfsabbildung auf einen Bereich, wie wir ihn vorausgesetzt hatten, übergehen. Aber auch von der Voraussetzung der Regularität von $f(\zeta)$ auf K können wir uns weitgehend frei machen. Zu diesem Zwecke approximieren wir $\mathfrak{B}$ durch eine aufsteigende Folge von Teilbereichen $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$; dabei enthalte schon $\mathfrak{B}^{(1)}$ sämtliche bestimmenden Punkte von $\mathfrak{f}(\zeta)$ im Inneren, insbesondere also auch die gemeinsamen Pole und Nullstellen von $f(\zeta)$ und $\mathfrak{f}(\zeta)$. $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ werde berandet von n analytischen Kurven $K_\nu^{(\varkappa)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, die bzw. die Randkurven K_ν von $\mathfrak{B}$ approximieren. Mit $\mathfrak{g}^{[\varkappa]}(\zeta; z)$[5]), $\mathfrak{j}_\alpha^{(\varkappa)}(\zeta; z, z')$ bezeichnen wir die auf $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ bezüglichen speziellen Abbildungsfunktionen aus § 1. Dann zeigen wir zunächst: es gilt gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{B}$

$$
\lim_{\varkappa\to\infty} \frac{\mathfrak{g}(\zeta; z)}{\mathfrak{g}^{[\varkappa]}(\zeta; z)} = 1; \quad \lim_{\varkappa\to\infty} \frac{\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z')}{\mathfrak{j}_\alpha^{(\varkappa)}(\zeta; z, z')} = 1, \tag{53}
$$

wobei die $\mathfrak{g}^{[\varkappa]}$ auf $K_\nu^{[\varkappa]}$ eine nur von $\varkappa$, nicht von ν abhängige Umlaufszahl haben, die dann auch die von $\mathfrak{g}$ auf K_ν ist.

Wir führen den Beweis nur für den Fall der Funktion $\mathfrak{j}_\infty$; er verläuft in den anderen Fällen ganz analog. Mit c_ν bezeichnen wir den (konstanten) Wert von $\lg|\mathfrak{j}_\infty|$ auf K_ν, mit $c_\nu^{(\varkappa)}$ von den $\lg|\mathfrak{j}_\infty^{(\varkappa)}|$ auf

5) Nicht zu verwechseln mit einer auf S. 98 eingeführten Bezeichnung.

$K_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{B}'$ sei ein beliebiger abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{B}$; für alle hinreichend großen $\varkappa$ liegt er auch ganz im Inneren von $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$. Da $\mathfrak{j}_\infty$ im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ regulär und also gleichmäßig stetig ist, und da für alle hinreichend großen $\varkappa$ $K_\nu^{(\varkappa)}$ beliebig nahe bei K_ν liegt, so gilt bei beliebig kleinem positivem ε für alle hinreichend großen $\varkappa$:

$$|\lg|\mathfrak{j}_\infty|_{K_\nu^{(\varkappa)}} - c_\nu| \leqq \varepsilon,$$

wo $|\mathfrak{j}_\infty|_{K_\nu^{(\varkappa)}}$ irgendeinen Wert von $|\mathfrak{j}_\infty|$ auf $K_\nu^{(\varkappa)}$ bedeutet. Wegen

$$\lg|\mathfrak{j}_\infty^{(\varkappa)}|_{K_\nu^{(\varkappa)}} = c_\nu^{(\varkappa)}$$ folgt

$$\left|\lg\left|\frac{\mathfrak{j}_\infty}{\mathfrak{j}_\infty^{(\varkappa)}}\right|_{K_\nu^{(\varkappa)}} - c_\nu + c_\nu^{(\varkappa)}\right| \leqq \varepsilon. \tag{54}$$

Die Funktion

$$\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta) = \lg\frac{\mathfrak{j}_\infty(\zeta)}{\mathfrak{j}_\infty^{(\varkappa)}(\zeta)}$$

ist, wenn der bei Eins verschwindende Zweig des Logarithmus gewählt wird, eine in $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ reguläre und eindeutige Funktion, die wegen der Normierung von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}^{(\varkappa)}$ bei z' daselbst den Wert Null hat; zu beweisen ist

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta) = 0$$

gleichmäßig in $\mathfrak{B}'$. Wir setzen noch $c_\nu - c_\nu^{(\varkappa)} = C_\nu^{(\varkappa)}$.

Dann wird aus (54): $|\Re(\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta))_{K_\nu^{(\varkappa)}} - C_\nu^{(\varkappa)}| \leqq \varepsilon.$

In Worten: das Bild, das $\omega = \mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta)$ von $K_\nu^{(\varkappa)}$ entwirft, bleibt ganz in einer ε-Umgebung der Parallelen zur imaginären Achse $\Re(\omega) = C_\nu^{(\varkappa)}$. Also kann dieses Bild nur um solche Punkte eine von Null verschiedene Umlaufszahl besitzen, die ebenfalls in dieser Umgebung liegen. Daraus folgt zunächst, daß der Abstand zweier benachbarter jener Parallelen höchstens gleich 2ε sein kann, da sonst die von $\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta)$ in $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ angenommenen Werte keine zusammenhängende Menge bilden würden. Da außerdem der Wert $\omega = 0$ bei $\zeta = z'$ angenommen wird, so ist der Abstand der äußersten jener Parallelen von der imaginären Achse höchstens gleich $2n\varepsilon$, d. h. auf allen $K_\nu^{(\varkappa)}$, und also in ganz $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$, gilt

$$|\Re(\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta))| \leqq (2n+1)\varepsilon.$$

Es konvergiert also $\Re(\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta))$ in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig gegen Null, und daher auch $\mathfrak{k}^{(\varkappa)}(\zeta)$ selbst.[6])

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{f}^{(\varkappa)}(\zeta)$ die Funktion, die wir an Stelle von $\mathfrak{f}(\zeta)$ erhalten, wenn wir in (39) die $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{j}$ durch die entspre-

6) Für den Schluß von der Konvergenz des Realteils auf die der Funktion selbst vgl. Bieberbach, Lit.-Verz. (1), S. 65.

chenden $g^{[\varkappa]}$, $j^{(\varkappa)}$ ersetzen, ebenso mit $f^{0(\varkappa)}(\zeta)$ die hierbei an Stelle von $f^0(\zeta)$ (s. (47)) tretende Funktion; auch die ersten Entwicklungskoeffizienten dieser Funktionen bei den bestimmenden Punkten von $f(\zeta)$ bezeichnen wir ebenso, wie die der Funktionen $f(\zeta)$, $f^0(\zeta)$ (S. 108), indem wir nur noch den oberen Index $\varkappa$ anfügen. Endlich setzen wir noch

$$F^{(\varkappa)}(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{f^{(\varkappa)}(\zeta)} = \frac{f(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{f^{(\varkappa)}(\zeta)} = F(\zeta) \frac{f(\zeta)}{f^{(\varkappa)}(\zeta)}$$

(vgl. S. 108). Aus (53) folgt dann

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \mathfrak{a}^{(\varkappa)} = \mathfrak{a}, \quad \lim_{\varkappa \to \infty} \mathfrak{a}^{0(\varkappa)} = \mathfrak{a}^0 \tag{55}$$

$$\lim_{\varkappa \to \infty} F^{(\varkappa)}(\zeta) = F(\zeta), \tag{56}$$

letzteres gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$.

In jedem $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ sind nun die Voraussetzungen für (I) erfüllt; wir setzen noch

$$L^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi} \int_{K^{(\varkappa)}} \lg r \, d\varphi$$

und bezeichnen den in (I) rechts stehenden Ausdruck mit $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^0)$. Dann lautet (I) für $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$

$$L^{(\varkappa)} \geqq A(\mathfrak{a}^{(\varkappa)}, \mathfrak{a}^{(\varkappa)0}).$$

Aus (55) folgt zunächst

$$\lim_{\varkappa \to \infty} A(\mathfrak{a}^{(\varkappa)}, \mathfrak{a}^{(\varkappa)0}) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^0).$$

Ferner ist leicht zu sehen, daß $L^{(\varkappa)}$ mit $\varkappa$ monoton wächst. Es ist nämlich $L^{(\varkappa)} - L^{(\varkappa-1)}$ gleich dem Integral $\frac{1}{2\pi} \int \lg r \, d\varphi$, erstreckt über den Rand des Bereichs $\mathfrak{B}^{(\varkappa)} - \mathfrak{B}^{(\varkappa-1)}$. In diesem Bereich erfüllt aber $f(\zeta)$ die zu Beginn des Paragraphen über $F(\zeta)$ gemachten Voraussetzungen, und daher ist jenes Integral nach (46) positiv (falls nicht $f(\zeta) = \text{const}$).

Ist also noch $f(\zeta)$ so beschaffen, daß die Folge der $L^{(\varkappa)}$ beschränkt und daher konvergent ist — dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $|f(\zeta)|$ in einer gewissen Nachbarschaft des Randes zwischen zwei endlichen und von Null verschiedenen Schranken liegt —, so gilt für

$$L = \lim_{\varkappa \to \infty} L^{(\varkappa)} \tag{57}$$

wieder (I). Die Bezeichnung (57) ist dadurch gerechtfertigt, daß, falls $f(\zeta)$ auf dem Rande regulär ist, (57) auch gilt, wenn L in der früheren Weise definiert wird.

Aber auch der die Gültigkeit des Gleichheitszeichens betreffende Zusatz zu (I) bleibt erhalten. Denn nach dem eben Ausgeführten ist

$$L - A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^0) = \lim_{\varkappa \to \infty} (L^{(\varkappa)} - A(\mathfrak{a}^{(\varkappa)}, \mathfrak{a}^{(\varkappa)0})). \tag{58}$$

Ferner erkennt man, wenn man sich an die Herleitung von (I) erinnert, daß

$$L^{(\varkappa)} - A(\mathfrak{a}^{(\varkappa)}, \mathfrak{a}^{(\varkappa)0}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{B}^{(\varkappa)}} \left| \frac{F^{(\varkappa)\prime}(\zeta)}{F^{(\varkappa)}(\zeta)} \right|^2 d\omega_\zeta \geqq \iint_{\mathfrak{B}'} \left| \frac{F^{(\varkappa)\prime}(\zeta)}{F^{(\varkappa)}(\zeta)} \right|^2 d\omega_\zeta, \tag{59}$$

wo $\mathfrak{B}'$ wieder einen abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{B}$ bedeutet, und $\varkappa$ so groß gewählt ist, daß $\mathfrak{B}'$ auch ganz im Innern von $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ liegt. Wegen (56) strebt aber der letzte Ausdruck mit wachsendem $\varkappa$ gegen

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{B}'} \left| \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right|^2 d\omega_\zeta.$$

Aus (58) und (59) folgt also

$$L - A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^0) \geqq \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{B}'} \left| \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right|^2 d\omega_\zeta.$$

Das rechtsstehende Integral ist aber sicher positiv, falls $F(\zeta)$ keine Konstante, d. h. falls nicht $f(\zeta) = \text{const}$ $\mathfrak{f}(\zeta)$. Daher ist, von der genannten Ausnahme abgesehen, $L > A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^0)$.

§ 5. Vergleich von L mit einem Flächeninhalt.

In gewissen Fällen läßt sich die Größe L mit einem Flächeninhalt vergleichen, der in engstem Zusammenhang mit dem Bildbereich steht; so insbesondere mit dem Inhalt des Bildbereichs selbst, falls er den Nullpunkt, aber nicht den unendlich fernen Punkt bedeckt, und jeden andern Punkt höchstens so oft wie den Nullpunkt. Der Flächeninhalt ist dabei immer auf der Riemann schen Fläche des Bildbereichs zu messen, d. h. mehrfach bedeckte Flächenstücke der Bildebene sind entsprechend vielfach zu zählen.

Allgemein können wir diesen Vergleich dann durchführen, wenn $f(\zeta)$ zunächst wieder auf K regulär und nullstellenfrei ist, und wenn die Anzahl a_∞ der Pole von $f(\zeta)$ in $\mathfrak{B}$ von der Anzahl a_0 der Nullstellen verschieden ist, und außerdem für die Anzahl a_ω der ω-Stellen im Inneren von $\mathfrak{B}$ bei beliebigem ω gilt

$$a_0 \leqq a_\omega \leqq a_\infty \quad \text{oder} \quad a_\infty \leqq a_\omega \leqq a_0. \tag{60}$$

Wir setzen $a_0 - a_\infty = m$; das ist die Gesamtumlaufszahl von $f(\zeta)$ auf K um den Nullpunkt. Ferner setzen wir

$$G = e^{\frac{2}{m}L} = e^{\frac{1}{2m\pi}\int_K \lg r^2 d\varphi}, \qquad A = \frac{D}{m\pi} = \frac{1}{2m\pi}\int_K r^2 d\varphi.$$

Dann gilt, wie wir beweisen werden,

$$G \leqq A \tag{61}$$

oder also

$$\frac{L}{m} \leqq \frac{1}{2} \lg \frac{D}{m\pi}, \tag{62}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, falls der Rand des Bildbereiches, abgesehen von solchen Randstücken, die zweimal in verschiedenem Sinn durchlaufen werden, ganz auf einem Kreis um den Nullpunkt liegt. Jene zweimal durchlaufenen Randstücke liefern zu den Integralen L und D keinen Beitrag; zu ihnen gehören insbesondere die beiden Ufer eines Schlitzes, aber auch sich deckende und in entgegengesetztem Sinn durchlaufene Randstücke in verschiedenen Blättern des Bildbereiches. Die übrigen Randstücke wollen wir kurz als wesentliche bezeichnen.

D ist in dem vorhin genannten Spezialfall der Inhalt des Bildbereichs; auch in anderen Fällen läßt D oder $-D$ sich als ein Flächeninhalt deuten; z. B. ist für einen schlichten, den unendlich fernen Punkt bedeckenden Bereich $-D$ der Inhalt der Komplementärbereiche.

Zum Beweise von (61) brauchen wir eine einfache Erweiterung des bekannten Satzes, daß das arithmetische Mittel stets mindestens gleich dem geometrischen ist, und gleich nur, wenn alle Größen, über die gemittelt wird, übereinstimmen. Es liege eine beliebige Anzahl positiver Größen in natürlicher Reihenfolge geordnet vor:

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_k, \tag{63}$$

und jeder sei ein positives oder negatives Gewicht zugeschrieben:

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k,$$

wobei die $\gamma_\varkappa$ den Bedingungen genügen sollen

$$\sum_{\varkappa=1}^{k'} \gamma_\varkappa \geqq 0 \qquad \sum_{\varkappa=k'}^{k} \gamma_\varkappa \geqq 0 \tag{64}$$

bei beliebigen k' mit $1 \leqq k' \leqq k$. Insbesondere ist also $\gamma_1 > 0$, $\gamma_k > 0$, und hieraus und aus $\sum_{\varkappa=1}^{k-1} \gamma_\varkappa \geqq 0$ folgt

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa > 0.$$

Nun definieren wir $\tilde{\varrho}^{(a)}$ als Verallgemeinerung des arithmetischen und $\tilde{\varrho}^{(g)}$ als Verallgemeinerung des geometrischen Mittels der $\varrho_\varkappa$ folgendermaßen[7]):

$$\tilde{\varrho}^{(a)} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa \varrho_\varkappa}{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa}, \quad \lg \tilde{\varrho}^{(g)} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa \lg \varrho_\varkappa}{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $\tilde{\varrho}^{(a)}$ und $\tilde{\varrho}^{(g)}$ wirklich Mittelwerte der $\varrho_\varkappa$ sind, d. h., daß sie zwischen dem Größten und Kleinsten derselben liegen, und ferner, daß die eben erwähnte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel immer noch gilt. Wir behaupten also

$$\varrho_1 < \tilde{\varrho}^{(g)} < \tilde{\varrho}^{(a)} < \varrho_k. \tag{65}$$

Für den Beweis brauchen wir eine einfache Vorbetrachtung.

Unter einer Serie verstehen wir eine (endliche) Folge von gleichen Größen; unter einer Vorzeichenreihe eine beliebige Aufeinanderfolge von $+1$ und -1, oder also eine Folge von Vorzeichenserien. Wir betrachten nun endliche Vorzeichenreihen, die den Bedingungen (64) genügen, wenn daselbst $\gamma_\varkappa = \pm 1$ ist. Insbesondere beginnt und schließt eine solche Reihe mit $+1$. Wie man leicht sieht, bleibt die durch (64) erklärte Eigenschaft erhalten, wenn man aus jeder Serie der Reihe *ein* Glied entfernt. Indem man die ausgeschiedenen Glieder in der Reihenfolge ordnet, die sie in der ursprünglichen Reihe hatten, erhält man eine alternierende Reihe, die mit $+1$ beginnt und endigt. Wiederholt man den Prozeß oft genug, so ist schließlich die gegebene Reihe ganz in solche alternierende Reihen aufgelöst.

Beim Beweis von (65) dürfen wir uns auf rationale, und dann natürlich auch auf ganz rationale $\gamma_\varkappa$ beschränken; im Falle irrationaler $\gamma_\varkappa$ (den wir übrigens gar nicht benötigen werden) führt ein einfacher Grenzprozeß in bekannter Weise zum Ziel. Ferner dürfen wir voraussetzen, daß die $\gamma_\varkappa = \pm 1$ seien, indem wir ein $|\gamma_\varkappa| \neq 1$ durch entsprechend oftmaliges Anschreiben des zugehörigen $\varrho_\varkappa$ berücksichtigen. Allerdings kommen dann in (63) auch gleiche $\varrho_\varkappa$ vor, aber eine Serie von solchen kann sich höchstens über eine Serie in der Reihe der $\gamma_\varkappa$ erstrecken.

---

7) Meines Wissens sind diese Verallgemeinerungen neu; eine systematische Auswertung möchte ich auf später verschieben und hier nur das für den vorliegenden Zweck Benötigte herausgreifen.

Wir beweisen nun die Behauptung zuerst für den Fall alternierender $\gamma_\varkappa$. Sie lautet dann: Aus

$$0 < \varrho_0 < \varrho_1 < \cdots < \varrho_{2n} \tag{66}$$

folgt

$$\varrho_0 < \frac{\varrho_{2n}\varrho_{2n-2}\cdots\varrho_0}{\varrho_{2n-1}\varrho_{2n-3}\cdots\varrho_1} < \varrho_{2n} - \varrho_{2n-1} + \varrho_{2n-2} - + \cdots - \varrho_1 + \varrho_0 < \varrho_{2n}. \tag{67}$$

Die erste und letzte dieser Ungleichungen folgen unmittelbar aus (66); die mittlere für $n = 1$, also

$$\varrho_2 - \varrho_1 + \varrho_0 > \frac{\varrho_2\varrho_0}{\varrho_1} \tag{68}$$

aus

$$(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_1 - \varrho_0) > 0.$$

Setzen wir nun

$$\varrho_2' = \varrho_2 - \varrho_1 + \varrho_0; \quad \varrho_2'' = \frac{\varrho_2\varrho_0}{\varrho_1},$$

so ist

$$\varrho_4 > \varrho_3 > \varrho_2 > \varrho_2' > \varrho_2''.$$

Daher können wir (68) auf $\varrho_4, \varrho_3, \varrho_2'$ statt $\varrho_2, \varrho_1, \varrho_0$ anwenden und erhalten

$$\varrho_4 - \varrho_3 + \varrho_2 - \varrho_1 + \varrho_0 > \frac{\varrho_4\varrho_2'}{\varrho_3} > \frac{\varrho_4\varrho_2''}{\varrho_3} = \frac{\varrho_4\varrho_2\varrho_0}{\varrho_3\varrho_1},$$

womit (67) für $n = 2$ bewiesen ist. Man sieht ohne weiteres, wie der Schluß auf größere Werte von n fortzusetzen ist.

Im allgemeinen Falle bilden die $\gamma_\varkappa$ eine Vorzeichenreihe, wie wir sie S. 115 vor uns hatten; wir zerlegen sie in alternierende, mit $+1$ beginnende und endigende Reihen R_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$; da die Summe jeder derselben gleich Eins ist, so ist $m = \sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa$. Wir greifen die den $\gamma_\varkappa$ von R_μ zugeordneten $\varrho_\varkappa$ heraus; es seien dies $\varrho_{\varkappa_0}^{(\mu)}, \ldots \varrho_{\varkappa_{2p}}^{(\mu)}$, und diese sind alle verschieden, auch wenn in der ursprünglichen Reihe der ϱ zur Berücksichtigung gewisser $|\gamma_\varkappa| \neq 1$ auch gleiche $\varrho_\varkappa$ vorkamen. Wir bilden $\varrho^{\widetilde{(\mu)}(a)}$ und $\varrho^{\widetilde{(\mu)}(g)}$:

$$\varrho^{\widetilde{(\mu)}(a)} = \sum_{\beta=0}^{2p} (-1)^\beta \varrho_{\varkappa_\beta}^{(\mu)}, \quad \lg \varrho^{\widetilde{(\mu)}(g)} = \sum_{\beta=0}^{2p} (-1)^\beta \lg \varrho_{\varkappa_\beta}^{(\mu)}.$$

Dann ist nach (67)

$$\varrho_1 \leqq \varrho_{\varkappa_0}^{(\mu)} < \varrho^{\widetilde{(\mu)}(g)} < \varrho^{\widetilde{(\mu)}(a)} < \varrho_{\varkappa_{2p}}^{(\mu)} \leqq \varrho_k. \tag{69}$$

Ferner ist jetzt

$$\tilde{\varrho}^{(a)} = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \varrho^{\widetilde{(\mu)}(a)}}{m}, \quad \lg \tilde{\varrho}^{(g)} = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \lg \varrho^{\widetilde{(\mu)}(g)}}{m}, \tag{70}$$

und die Behauptung ergibt sich nun ohne weiteres aus (69) und (70) als Folge der entsprechenden Tatsachen bei Mittelbildungen mit Gewichten $+1$, wie sie ja in (70) vorliegen.

Beim Beweis der Formel (61) dürfen wir $m > 0$ voraussetzen; andernfalls durchlaufe man den Rand des Bildbereiches bei der Berechnung der Integrale L und D in negativem Sinn, wodurch D in $-D$, L in $-L$, m in $-m$ übergeht. Auf diese Größen ist dann wieder (61) anwendbar, wo sich die negativen Vorzeichen sofort herausheben. Ist $m > 0$, so besagt (60), daß die Anzahl der Bedeckungen eines beliebigen Punktes der Bildebene höchstens gleich ist der des Nullpunktes und mindestens gleich der des unendlich fernen Punktes.

Wir können nun die beiden Integrale L und D folgendermaßen berechnen: Wir teilen den vollen Winkel um den Nullpunkt der Bildebene so, daß in jedem Teilwinkel die Anzahl der Schnittpunkte der Nullpunktsstrahlen mit wesentlichen Randstücken konstant ist (wobei der gleichzeitige Schnitt mit mehreren Randkurven natürlich entsprechend vielfach zählt). Da $f(\zeta)$ auf K noch regulär ist und die K_ν analytische Kurven sind, so sind es auch ihre Bilder, und daher ist die Anzahl jener Teilwinkel endlich. Gehen wir nun auf einem Strahl im Inneren eines solchen Winkels vom Nullpunkt nach außen, so nimmt in jedem Schnittpunkt die Bedeckungszahl um Eins ab oder um Eins zu, je nachdem bei einem Umlauf um den Bereich, der ihn zur Linken läßt, jener Schnittpunkt mit positivem oder negativem $d\varphi$ durchlaufen wird. (Punkte, in denen $d\varphi = 0$, können außer Betracht bleiben, da sie nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.) Schnittpunkten der ersten Art ordnen wir $+1$ zu, solchen der zweiten Art -1. Da nach Voraussetzung die Bedeckungszahl nie größer als im Nullpunkt und nie kleiner als im unendlich fernen Punkt ist, so erhält man auf jedem Strahl eine Vorzeichenreihe $\gamma_\varkappa$, die den Bedingungen (64) genügt. Da ferner auf jedem Strahl die Bedeckungszahl um m abnimmt, so ist die Summe jeder dieser Reihen gleich m. $r_\varkappa(\varphi)$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ seien die Nullpunktsabstände der vorhin betrachteten Schnittpunkte des Strahles mit Amplitude φ. Dann definieren wir

$$\overline{r^2(\omega)}^{(a)} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa r_\varkappa^2(\varphi)}{m}, \quad \lg \overline{r^2(\varphi)}^{(g)} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa \lg r_\varkappa^2(\varphi)}{m}.$$

Dann ist nach (65)

$$\overline{r^2(\varphi)}^{(a)} \geqq \overline{r^2(\varphi)}^{(g)}. \tag{71}$$

Das Gleichheitszeichen darf hier nicht ausgeschlossen werden, da ja alle $r_\varkappa(\varphi)$ einander gleich sein könnten, während die den Bildungen $\tilde{\varrho}^{(a)}$ und $\tilde{\varrho}^{(g)}$ in (65) zugrunde liegenden $\varrho_\varkappa$ alle als verschieden vorausgesetzt waren; doch gilt es nicht für jedes φ, es sei denn, daß die Bedeckungszahl eines jeden Punktes entweder gleich der des Nullpunktes oder gleich der des unendlich fernen Punktes ist. A und G sind nun so zu berechnen

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{r^2(\varphi)}^{(a)}\, d\varphi, \quad \lg G = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg \overline{r^2(\varphi)}^{(g)}\, d\varphi, \tag{72}$$

und hieraus und aus (71) folgt sofort die Behauptung als Folge des gewöhnlichen Satzes vom arithmetischen und vom geometrischen Mittel, und das Gleichheitszeichen gilt nur in dem genannten Ausnahmefall, da nur dann sowohl überall in (71) Gleichheit gilt, als auch die Funktion $\overline{r^2(\varphi)}^{(a)} = \overline{r^2(\varphi)}^{(g)}$, deren Mittelwerte in (72) berechnet werden, konstant ist.

Selbstverständlich kann man wieder durch ein Approximationsverfahren, wie wir es S. 110 ff. anwandten, die Ungleichungen (61) und (62) von der Voraussetzung der Regularität von $f(\zeta)$ auf dem Rande frei machen. L ist durch (57) zu definieren, der Inhalt muß unter Umständen durch den inneren Inhalt ersetzt werden.

§ 6. Schlichte Funktionen mit einem Pol und einer Nullstelle.

Für solche Funktionen können wir das in (I) links stehende Integral L leicht nach oben abschätzen. Wenden wir nämlich die Ungleichung (46) entsprechend der anschließenden Bemerkung auf die einzelnen Komplementärbereiche des Bildbereiches $\mathfrak{B}'$ an, und beachten, daß bei der Berechnung von L jede Randkurve von $\mathfrak{B}'$ so durchlaufen wird, daß der zugehörige Komplementärbereich zur Rechten liegt, so finden wir

$$L \leqq 0, \tag{73}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn der Bildbereich ein Schlitzbereich ist.

Ist nun z die Nullstelle, z' der Pol von $f(\zeta)$, so setzen wir

$$\mathfrak{f}(\zeta) = \mathfrak{j}_a(\zeta; z, z')$$

und (wie gemäß (47) bis auf einen konstanten Faktor nicht anders möglich)

$$\mathfrak{f}^0(\zeta) = \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, z').$$

Dann ist $\mathfrak{a} = j_\alpha;\ \mathfrak{a}^0 = j_\infty;\ \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^{0\prime} = 1,$

und wir normieren auch $f(\zeta)$ durch die Forderung $a' = 1$. Aus (I) und (73) finden wir nun

$$(74)\qquad \tau \lg \left|\frac{a}{j_\alpha}\right| + \frac{\tau - 1}{2} \lg \left|\frac{j_\alpha}{j_\infty}\right| + \tau' \operatorname{amp} \frac{a}{j_\alpha} + \frac{\tau'}{2} \operatorname{amp} \frac{j_\alpha}{j_\infty} \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur, wenn es in (I) und (73) gilt; in (I) gilt es nur für $j_\alpha(\zeta; z, z')$, und da diese Funktion auf einen Schlitzbereich abbildet, so gilt es für sie und nur für sie auch in (74). Es folgt also zunächst, wenn man $a = j_\alpha$ setzt

$$(75)\qquad \frac{\tau - 1}{2} \lg \left|\frac{j_\alpha}{j_\infty}\right| + \frac{\tau'}{2} \operatorname{amp} \frac{j_\alpha}{j_\infty} = 0,$$

also speziell für $\alpha = 1$, d. h. $\tau = 0$, $\tau' = 1$,

$$(76)\qquad \lg \left|\frac{j_1}{j_\infty}\right| - \operatorname{amp} \frac{j_1}{j_\infty} = 0.$$

Wir bezeichnen nun mit p den ersten Laurent-Koeffizienten von $\mathfrak{p}(\zeta; z, z')$ bei z, mit q denjenigen von $\mathfrak{q}(\zeta; z, z')$ (d. h. den Wert dieser Funktion bei z; letztere Bezeichnung steht im Einklang mit der Bedeutung von q in (31)). Dann folgt aus (15) für $t = -1$ bzw. $t = i$

$$\lg j_\infty = \lg p - \lg q, \quad \lg j_1 = \lg p + i \lg q, \qquad \text{also}$$

$$(77)\qquad \begin{aligned} \lg |j_\infty| &= \lg |p| - \lg |q|, \quad \operatorname{amp} j_\infty = \operatorname{amp} p - \operatorname{amp} q \\ \lg |j_1| &= \lg |p| - \operatorname{amp} q, \quad \operatorname{amp} j_1 = \operatorname{amp} p + \lg |q|. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (76) ein, so findet man $\operatorname{amp} q = 0$.

Aus (15) folgt ferner $\lg j_\alpha = \lg p + t \lg q$, also wegen $\operatorname{amp} q = 0$ mit $t = \tau + i\tau'$

$$\lg |j_\alpha| = \lg |p| + \tau \lg q, \quad \operatorname{amp} j_\alpha = \operatorname{amp} p + \tau' \lg q.$$

Es bestehen also folgende Beziehungen zwischen j_0, j_∞, p und q:

$$(78)\quad \lg |p| = \tfrac{1}{2}(\lg |j_0| + \lg |j_\infty|), \qquad \lg q = \tfrac{1}{2}(\lg |j_0| - \lg |j_\infty|) \quad (79)$$

$$(80)\quad \operatorname{amp} p = \operatorname{amp} j_0 = \operatorname{amp} j_\infty, \qquad \operatorname{amp} q = 0 \quad (81)$$

(vgl. (10) und (11));

$$(82)\qquad \lg |j_\alpha| = \lg |p| + \tau \lg q = \frac{1 - \tau}{2} \lg |j_\infty| + \frac{1 + \tau}{2} \lg |j_0|$$

$$(83)\qquad \operatorname{amp} j_\alpha = \operatorname{amp} p + \tau' \lg q = \operatorname{amp} j_\infty + \frac{\tau'}{2} \lg \frac{j_0}{j_\infty},$$

und insbesondere

$$(84)\qquad \lg |j_1| = \lg |p| = \frac{\lg |j_0| + \lg |j_\infty|}{2}$$

$$(85)\qquad \operatorname{amp} j_1 = \operatorname{amp} p + \lg q = \operatorname{amp} j_\infty + \frac{1}{2} \lg \frac{j_0}{j_\infty}.$$

Wir fügen nochmals die Beziehungen zwischen τ, τ' und α an (vgl. (16) und (17)):

$$t = \tau + i\tau' = e^{i\vartheta} = \frac{(1+i\alpha)^2}{1+\alpha^2}; \tag{86}$$

$$\tau = \cos\vartheta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}; \quad \tau' = \sin\vartheta = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2};$$

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{1-\tau}{\tau'} = \frac{\tau'}{1+\tau}. \tag{87}$$

Kehren wir zu (74) zurück, so folgt wegen (75)

$$\tau \lg\left|\frac{a}{j_\alpha}\right| + \tau' \operatorname{amp}\frac{a}{j_\alpha} \geqq 0. \tag{88}$$

Drücken wir hier $\lg|j_\alpha|$ und $\operatorname{amp} j_\alpha$ gemäß (82) und (83) durch $\lg|p|$, $\lg q$ und $\operatorname{amp} p$ aus und setzen wieder nach (87)

$$\tau = -\cos(\vartheta+\pi), \quad \tau' = -\sin(\vartheta+\pi), \text{ so erhalten wir}$$

$$\cos(\vartheta+\pi)\lg\left|\frac{a}{p}\right| + \sin(\vartheta+\pi)\operatorname{amp}\frac{a}{p} + \lg q \leqq 0, \tag{89}$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur für

$$f(\zeta) = \mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z') \text{ mit } \alpha = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

Wenden wir diese Ungleichung mit $\vartheta = 0$ zunächst auf $f(\zeta) = \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z, z')$ an, so haben wir $\lg|a| = \lg|j_\infty| = \lg|p| - \lg q$ zu setzen (s. (77)) und finden

$$\lg q < 0 \tag{90}$$

(nicht etwa $\lg q = 0$, da bei $\vartheta = 0$ in (89) nur für $\mathfrak{j}_0(\zeta; z, z')$ das Gleichheitszeichen gilt).

Die in (89) links eingehende Größe $\lg\frac{a}{p}$ ist eine wohlbestimmte, nämlich der Wert der Funktion $\lg\frac{f(\zeta)}{\mathfrak{p}(\zeta; z, z')}$ bei $\zeta = z$, die ihrerseits eindeutig festgelegt ist dadurch, daß der bei $\zeta = z'$ verschwindende Zweig gewählt wird (S. 110). Setzen wir $\eta = \operatorname{amp}\left(\lg\frac{a}{p}\right)$, so können wir (89) auch so schreiben:

$$\left|\lg\frac{a}{p}\right| \cdot \cos(\vartheta+\pi-\eta) \leqq -\lg q. \tag{91}$$

Dies gilt für jeden beliebigen Wert von ϑ; also gilt auch

$$\left|\lg\frac{a}{p}\right| \leqq -\lg q. \tag{92}$$

Für $a = j_\alpha$ mit $\alpha = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$ und nur für diesen Wert a gilt in (91) das Gleichheitszeichen. Daher muß $\cos\left(\vartheta+\pi-\operatorname{amp}\left(\frac{j_\alpha}{p}\right)\right) = 1$ sein, da

sonst $\left|\lg \frac{i_\alpha}{p}\right| > -\lg q$ folgen würde. Also ist $\operatorname{amp}\left(\lg \frac{i_\alpha}{p}\right) = \vartheta + \pi$ was übrigens auch aus (82) und (83) folgt. Damit ist zu jedem Randpunkt des Kreises, auf den nach (92) $\lg \frac{a}{p}$ beschränkt ist, genau eine Funktion nachgewiesen, für die $\lg \frac{a}{p}$ in diesen Punkt fällt.

Die Voraussetzung, daß die Abbildung den Punkt z in den Nullpunkt überführt, ist belanglos; man betrachte sonst die Funktion $f(\zeta) - f(z)$. Indem wir noch $z' = \infty$ annehmen, können wir das Ergebnis in den Satz zusammenfassen:

Satz 1. *$\mathfrak{B}$ sei ein endlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereich der ζ-Ebene, der den unendlich fernen Punkt im Inneren enthält, und $f(\zeta)$ vermittle eine schlichte Abbildung desselben mit $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$. Dann gibt es zu jedem Punkt z aus $\mathfrak{B}$ zwei Zahlen $r(z)$ und $m(z)$, von denen die erste positiv ist, so daß für jedes $f(\zeta)$ gilt*

$$|\lg f'(z) - m(z)| \leqq r(z).$$

Unter $\lg f'(\zeta)$ ist dabei der bei $\zeta = \infty$ verschwindende Zweig zu verstehen. Jedem Wert $m(z) + r(z)e^{i(\vartheta+\pi)}$ entsprechen unendlich viele Funktionen $f(\zeta)$ mit $\lg f'(z) = m(z) + r(z)e^{i(\vartheta+\pi)}$, die sich alle nur um additive Konstanten unterscheiden; sie bilden $\mathfrak{B}$ ab auf die längs gewisser Bögen von logarithmischen Spiralen mit dem asymptotischen Punkt $f(z)$ aufgeschlitzte Ebene. Diese Spiralen treffen die von $f(z)$ ausgehenden Radien unter dem Winkel $\frac{\vartheta}{2}$.[8])

Über die Werte von $m(z)$ und $r(z)$ läßt sich im allgemeinen nichts aussagen; sie hängen in nicht näher angebbarer Weise von der Gestalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ ab. Ist dieser jedoch einfach zusammenhängend, und wählen wir für ihn insbesondere das Äußere des Einheitskreises, so können wir die Funktionen $m(z)$ und $r(z)$ angeben. Nach (92) ist $m(z) = \lg p$, $r(z) = -\lg q$, wo $p = \mathfrak{p}'(z; z, \infty)$, $q = \mathfrak{q}(z; z, \infty)$ ist. Nach (27) und (28) ist in unserem Falle

$$p = 1, \quad q = 1 - \frac{1}{|z|^2}.$$

8) Der in diesem Satze enthaltene Verzerrungssatz (d. h. die Abschätzung des Betrages von $f'(z)$) findet sich zuerst bei Herrn Grötzsch, Lit.-Verz. (13) I. Sein voller Inhalt ist in einem noch allgemeineren Satze von Grötzsch enthalten, Lit.-Verz. (13) III. Letztere Arbeit ist erst nach Fertigstellung der vorliegenden erschienen. Die Methode von Herrn Grötzsch unterscheidet sich wesentlich von der meinigen.

Wir haben somit den

Satz 2. *Wird das Äußere des Einheitskreises durch eine Funktion* $f(\zeta)$ *mit* $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ *schlicht abgebildet, so gilt*

$$|\lg f'(z)| \leqq \lg \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}.$$

Der Wert

$$\lg f'(z) = \left(\lg \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right) e^{i(\vartheta + \pi)}$$

wird nur von den Funktionen

$$(\zeta - z)\left(1 - \frac{1}{\bar{z}\zeta}\right)^t + C, \quad t = e^{i\vartheta}$$

erreicht (wo C eine beliebige Konstante ist).[9]) *Sie bilden auf die längs eines Bogens einer logarithmischen Spirale mit dem asymptotischen Punkt* $f(z)$ *aufgeschlitzte Ebene ab; die Spirale trifft die von* $f(z)$ *ausgehenden Radien unter dem Winkel* $\frac{\vartheta}{2}$.[10])

§ 7. Die im Einheitskreise regulären und schlichten Funktionen.[11])

Wir bezeichnen eine solche Funktion mit $s(z)$ und geben ihr bei $z = 0$ die Normierung

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1. \tag{93}$$

Sind z_0, z_1, z_2 spezielle Punkte im Einheitskreis $\mathfrak{E}$, so setzen wir

$$s_0 = s(z_0), \quad s_0' = s'(z_0), \quad s_1 = s(z_1), \quad s_1' = s'(z_1), \quad s_2 = s(z_2), \quad s_2' = s'(z_2).$$

Über $\mathfrak{E}$ sei eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche $\widetilde{\mathfrak{E}}$ mit dem Verzweigungspunkt z_1 ausgebreitet, ebenso über dem durch $s(z)$ entworfenen Bildbereich $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$ eine bei s_1 verzweigte, zweiblättrige Fläche $\widetilde{\mathfrak{E}}'$, die aufgefaßt werden kann als das durch $s(z)$ von $\widetilde{\mathfrak{E}}$ entworfene Bild. $\widetilde{\mathfrak{E}}'$ ist schlicht innerhalb der bei s_1 und ∞ verzweigten, die Vollkugel doppelt bedeckenden RIEMANNschen Fläche. Man bilde diese folgendermaßen auf eine schlichte ζ-Kugel ab: Man führe einen

9) Vgl. (29).

10) Der in diesem Satz enthaltene Verzerrungssatz findet sich zuerst bei Löwner, Lit.-Verz. (11).

11) Die in diesem Paragraphen angewendete Methode gewisser Hilfsabbildungen mittels rationaler Funktionen zweiten Grades findet sich schon bei Herrn Bieberbach, Lit.-Verz. (5), nur wird dort der zweite Verzweigungspunkt der zweiblättrigen, bei Unendlich verzweigten Riemannschen Fläche nicht in das Innere sondern auf den Rand des Bildbereiches gelegt. Hierher gehört auch der bekannte Kunstgriff des Herrn Faber, Lit.-Verz. (6), S. 41, und ebenso wendet Herr Grötzsch implizite solche Abbildungen an: sie stecken in den Hilfsabbildungen, die zur Auffindung einer „Maximalstreifeneinteilung" dienen (Lit.-Verz. (7), (13)).

geradlinigen Verzweigungsschnitt S von s_1 nach ∞, auf der Verlängerung der Strecke $\overline{s_2 s_1}$, der die Fläche in zwei Blätter zerlegt. Dann bilde man das eine derselben auf den Einheitskreis der ζ-Ebene ab, so daß das diesem Blatt angehörige Exemplar von s_2 in den Nullpunkt und die Verlängerung S' von S (als deren Bild dann zwangsläufig eine Nullpunktsgerade erscheint) in die reelle Achse übergeht; dabei sollen sich $s = \infty$, $\zeta = 1$ und $s = s_1$, $\zeta = -1$ entsprechen. Setzen wir diese Abbildung über S hinaus fort, so wird das andere Blatt auf das Äußere des Einheitskreises abgebildet, das zweite Exemplar von s_2 auf $\zeta = \infty$, das zweite Exemplar von S' wieder auf die reelle Achse. Durch unsere Angaben ist diese Abbildung eindeutig festgelegt. $\mathfrak{F}'$ geht dabei in einen schlichten Bereich $\mathfrak{B}$ der ζ-Ebene über, der die Punkte Null und Unendlich enthält. Da eine Spiegelung von $\mathfrak{F}'$ an S und darauf an S' die beiden Blätter vertauscht, so führt der entsprechende Spiegelungsprozeß in der ζ-Ebene den Bereich $\mathfrak{B}$ in sich selbst über. Dieser Prozeß besteht aber in der Vertauschung der Punkte ζ und

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}. \tag{94}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Beziehung zwischen s und ζ hergestellt wird durch

$$s = k(\zeta) = 4(s_2 - s_1)\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} + s_2. \tag{95}$$

Da $s = \infty$ in $\zeta = 1$ übergeht, so enthält $\mathfrak{B}$ diesen Punkt nicht.

Auf die geschilderte Weise erhält man mittels der Gesamtheit der Funktionen $s(z)$ jeden Bereich $\mathfrak{B}$, der aus einem beliebigen unter ihnen durch eine Null und Unendlich festhaltende Abbildung hervorgeht, und der die vorhin genannte Symmetrieeigenschaft besitzt, oder aber das Spiegelbild dieses Bereiches am Nullpunkt. Es sei nämlich $\zeta^* = f(\zeta)$ eine solche Abbildung des eben gewonnenen auf einen neuen derartigen Bereich $\mathfrak{B}^*$. Dann ist wegen der Symmetrie von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ und der Eindeutigkeit der zwischen ihnen vermittelnden Abbildung

$$f(\zeta) \equiv \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \tag{96}$$

und daraus ist zu ersehen, daß ein Punktepaar in der ζ-Ebene, das durch (94) verbunden ist, in ein ebensolches der ζ^*-Ebene übergeführt wird. Aus (96) folgt ferner, daß der Punkt $\zeta = -1$ (der als Bild von s_1 sicher zu $\mathfrak{B}$ gehört) in $\zeta^* = \pm 1$ übergeht. Wir dürfen $f(-1) = -1$ voraussetzen; andernfalls würden wir $f(\zeta)$ durch $-f(\zeta)$ ersetzen. Nun

kann $\zeta^* = 1$ nicht zu $\mathfrak{B}^*$ gehören, da aus der (96) entsprechenden Identität für die Umkehrfunktion folgen würde, daß sein Original in $\mathfrak{B}$ $\zeta = 1$ wäre, im Widerspruch zu einer vorhin gemachten Feststellung. Daher liefert $\sigma^* = \frac{\zeta^*}{(1-\zeta^*)^2}$ aus $\mathfrak{B}^*$ ein den Punkt ∞ auslassendes Bild, in dem wegen $\sigma^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}^*}\right) = \sigma^*(\zeta^*)$ sich die Bilder solcher Punkte wieder decken, deren Originale sich in $\widetilde{\mathfrak{E}}$ deckten; d. h. σ^* ist wieder eine eindeutige schlichte Funktion von z, die wir nur noch gemäß (95) zu normieren brauchen, um diejenige Funktion $s^*(z)$ zu gewinnen, die bei dem oben geschilderten Prozeß aus $\widetilde{\mathfrak{E}}$ den Bereich $\mathfrak{B}^*$ ergibt.

Ein von einem Bogen einer logarithmischen Spirale begrenzter Schlitzbereich $\mathfrak{B}_\alpha$ kann nun durch eine Drehstreckung stets auf eine Gestalt gebracht werden, in der er die durch (94) ausgedrückte Symmetrieeigenschaft besitzt, und den Punkt Eins nicht enthält. Sind nämlich e_1 und e_2 die Endpunkte des Schlitzes, so braucht man bloß die Drehstreckung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{e_1 \cdot e_2}}$ anzuwenden, wobei der auf dem ursprünglichen Schlitz liegende Wurzelwert zu nehmen ist (S. 99). Also erhält man auf die oben geschilderte Weise aus dem Bildbereich einer passenden Funktion $s(z)$ — sie heiße $s^{(\alpha)}(z; z_1, z_2)$ — einen Bereich $\mathfrak{B}_\alpha$. Die zugehörige Variable heiße $\zeta^{(\alpha)}$ und es sei

$$\zeta = f(\zeta^{(\alpha)})$$

die Beziehung, die zwischen ζ und $\zeta^{(\alpha)}$ auf Grund derjenigen zwischen zwischen s und $s^{(\alpha)}$ besteht.

$f(\zeta^{(\alpha)})$ ist nun, abgesehen von der Normierung, eine Funktion, wie wir sie im vorigen Paragraphen hatten; der Bereich $\mathfrak{B}$ ist hier $\mathfrak{B}_\alpha$, und es ist $z = 0$, $z' = \infty$. Daher ist nun $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta^{(\alpha)}; z, z') = \zeta^{(\alpha)}$, und $j_\alpha = 1$. Wenden wir unter Beachtung dieser Umstände (88) an, so erhalten wir

$$\tau \lg \left| \frac{f'(0)}{f'(\infty)} \right| + \tau' \operatorname{amp} \frac{f'(0)}{f'(\infty)} \geqq 0, \tag{97}$$

wo das Gleichheitszeichen nur gilt für $f(\zeta^{(\alpha)}) = \zeta^{(\alpha)}$.

Um daraus Aussagen über $s(z)$ zu gewinnen, müssen wir $f'(0)$ und $f'(\infty)$ durch s ausdrücken. Wir bezeichnen die Punkte von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{z}$, die beiden Exemplare von z_2 mit $\mathfrak{z}_2$ und $\tilde{\mathfrak{z}}_2$; dann ist, wenn wir die für $\mathfrak{j}_\alpha$ in seinem Pol auf S. 99 geforderte Normierung fallen lassen und statt dessen so normieren, wie dies den Angaben von S. 122—124 entspricht, die Beziehung zwischen z und $\zeta^{(\alpha)}$ gegeben durch

$$\zeta^{(\alpha)} = \mathfrak{j}_\alpha(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_2, \tilde{\mathfrak{z}}_2).$$

(Es ist natürlich ohne weiteres möglich, die Funktion $\mathfrak{j}_\alpha$ auch für einen so einfachen zweiblättrigen Bereich zu erklären, wie wir ihn in $\widetilde{\mathfrak{E}}$ vor uns haben.) Die Beziehung zwischen z und ζ wird hergestellt durch

$$s = s(z); \qquad s = k(\zeta).$$

Wir entwickeln $\mathfrak{j}_\alpha$ und $s(z)$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}_2$, $\bar{\mathfrak{z}}_2$ bzw. z_2, $k(\zeta)$ in der Umgebung von o und ∞:

$$\zeta^{(\alpha)} = \mathfrak{j}'_\alpha(\mathfrak{z}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_2) + \cdots; \quad \zeta^{(\alpha)} = \frac{\operatorname{res} \mathfrak{j}_\alpha(\bar{\mathfrak{z}}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)}{\mathfrak{z} - \bar{\mathfrak{z}}_2};$$

$$s - s_2 = s'(z_2)(z - z_2) + \cdots;$$

$$s - s_2 = k'(0)\zeta + \cdots; \quad s - s_2 = \frac{\operatorname{res} k(\infty)}{\zeta} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$f'(0) = \frac{s'(z_2)}{k'(0)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{j}'_\alpha(\mathfrak{z}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)}, \qquad f'(\infty) = \frac{\operatorname{res} k(\infty)}{s'(z_2)} \frac{1}{\operatorname{res} \mathfrak{j}_\alpha(\bar{\mathfrak{z}}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)}.$$

Es ist aber (s. (95)) $\quad k'(0) = \operatorname{res} k(\infty) = 4(s_2 - s_1).$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$m_\alpha = 16 \frac{\mathfrak{j}'_\alpha(\mathfrak{z}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)}{\operatorname{res} \mathfrak{j}_\alpha(\bar{\mathfrak{z}}_2; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)},$$

so ist also

$$\frac{f'(0)}{f'(\infty)} = \left(\frac{s'_2}{s_2 - s_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_\alpha},$$

und Einsetzen in (97) ergibt

$$\tau \lg \left|\frac{s'_2}{s_2 - s_1}\right|^2 + \tau' \operatorname{amp}\left(\frac{s'_2}{s_2 - s_1}\right)^2 \geqq \tau \lg |m_\alpha| + \tau' \operatorname{amp} m_\alpha, \tag{98}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für die Funktion $s^{(\alpha)}(z; z_1, z_2)$ gilt.

Setzt man hier $z_2 = 0$, und $z_1 = z_0$, so erhält man wegen $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$ eine Abschätzung für $s_0 = s(z_0)$, setzt man dagegen $z_1 = 0$ und $z_2 = z_0$, so bekommt man eine Abschätzung für $\frac{s'_0}{s_0}$. Durch Kombination beider gewinnt man eine solche für s'_0.

Es ist nun die Größe m_α zu berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir die Funktion $\mathfrak{j}_\alpha(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}_2)$ explizit aufstellen. Durch

$$w = \sqrt{\frac{z - z_1}{\bar{z}_1 z - 1}} \tag{99}$$

wird $\widetilde{\mathfrak{E}}$ auf den schlichten Einheitskreis abgebildet, wobei z_1 in den Nullpunkt übergeht. Wir setzen

$$w_2 = \sqrt{\frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1}} \tag{100}$$

und denken uns dabei einen bestimmten der beiden Wurzelwerte gewählt. Den Punkten $\mathfrak{z}_2$ und $\tilde{\mathfrak{z}}_2$ auf $\widetilde{\mathfrak{E}}$ entsprechen dann die Punkte $-w_2$ und w_2. Es ist also nach (24)

$$(101)\quad \zeta^{(\alpha)} = \mathfrak{j}_\alpha(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_2, \tilde{\mathfrak{z}}_2) = \mathfrak{j}_\alpha(w; -w_2, w'_2) = \frac{w+w_2}{w-w_2}\left(\frac{1+\bar{w}_2 w}{1-\bar{w}_2 w}\right)^t.$$

Daß hier der Forderung von S. 122—124 gemäß normiert ist, ersieht man daraus, daß beim Vertauschen sich deckender Punkte in $\widetilde{\mathfrak{E}}$, d. h. beim Vertauschen von w und $-w$ $\zeta^{(\alpha)}$ in $\frac{1}{\zeta^{(\alpha)}}$ übergeht. Nun findet man leicht

$$(102)\quad \mathfrak{j}'_\alpha(\mathfrak{z}_2; \mathfrak{z}_2, \tilde{\mathfrak{z}}_2) = \frac{1}{\operatorname{res} \mathfrak{j}_\alpha(\tilde{\mathfrak{z}}_2; \mathfrak{z}_2, \tilde{\mathfrak{z}}_2)} = -\frac{1-|z_1|^2}{4(z_1-z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)}\left(\frac{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}\right)^t,$$

also
$$m_\alpha = \frac{(1-z_1^2)^2}{(z_1-z_2)^2(1-\bar{z}_1 z_2)^2}\left(\frac{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}\right)^{2t}$$

und speziell für $z_2 = 0$, $z_1 = z_0$

$$\lg|m_\alpha| = 2\left(\lg(1-|z_0|^2) - \lg|z_0| + \tau \lg\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\right),$$

$$\operatorname{amp} m_\alpha = 2\left(-\operatorname{amp} z_0 + \tau' \lg\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\right),$$

ferner für $z_1 = 0$, $z_2 = z_0$

$$\lg|m_\alpha| = 2\left(-\lg z_0 + \tau \lg\frac{1-z_0}{1+z_0}\right),$$

$$\operatorname{amp} m_\alpha = 2\left(-\operatorname{amp} z_0 + \tau' \lg\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\right).$$

Führen wir diese Ausdrücke in (98) ein, wo wir ebenfalls die beiden Spezialisierungen vornehmen, und setzen wieder $\tau = \cos\vartheta$, $\tau' = \sin\vartheta$, so erhalten wir

$$(103)\quad \cos\vartheta\left(\lg\left|\frac{s_0}{z_0}\right| + \lg(1-|z_0|^2)\right) + \sin\vartheta\cdot\left(\operatorname{amp}\frac{s_0}{z_0}\right) \leqq \lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

$$(104)\quad \cos(\vartheta+\pi)\cdot\lg\left|\frac{s'_0\cdot z_0}{s_0}\right| + \sin(\vartheta+\pi)\cdot\operatorname{amp}\frac{s'_0 z_0}{s_0} \leqq \lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

In (103) gilt das Gleichheitszeichen nur für die Funktion $s^{(\alpha)}(z; z_0, 0)$, in (104) nur für $s^{(\alpha)}(z; 0, z_0)$.

Indem wir in (104) ϑ durch $\vartheta - \pi$ ersetzen, erhalten wir:

$$(105)\quad \cos\vartheta\cdot\lg\left|\frac{s'_0\cdot z_0}{s_0}\right| + \sin\vartheta\cdot\operatorname{amp}\frac{s'_0 z_0}{s_0} \leqq \lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur für die Funktion

$$s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0).$$

Addieren wir (103) und (105), so bekommen wir

$$\cos\vartheta\,(\lg|s_0'| + \lg(1-|z_0|^2)) + \sin\vartheta\cdot\operatorname{amp} s_0' \leqq 2\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \tag{106}$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen, falls $s^{(\alpha)}(z; z_0, 0) \equiv s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0)$, für diese Funktion und nur für diese. Daß aber jene beiden Funktionen im allgemeinen nicht identisch sind, ist leicht schon aus unseren geometrischen Überlegungen, die zu ihrer Bildung führten, zu erkennen. Denn bei $s^{(\alpha)}(z; z_0, 0)$ gehen die asymptotischen Punkte Null und Unendlich der logarithmischen Spirale der $\zeta^{(\alpha)}$-Ebene in $s^{(\alpha)} = 0$ über, dagegen bei $s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0)$ in $s_0^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}$. Nur falls $\alpha = 0$ oder $\alpha = \infty$ ist, kann man nicht mehr so schließen, da sich dann in der s-Ebene Schlitzbereiche mit geradlinigem Schlitz ergeben, und jeder Punkt in der Verlängerung des Schlitzes die Rolle eines „asymptotischen" übernehmen kann. In der Tat sieht man bei genauerem Verfolgen unserer Überlegungen, daß dann die geforderte Identität besteht; das wird sich später auch rechnerisch ergeben.

Ganz ebenso, wie wir aus (89) auf (92) schließen konnten, erhalten wir hier aus (103)

$$\left|\lg\frac{s_0}{z_0} + \lg(1-|z_0|^2)\right| \leqq \lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

und es ist

$$\lg\frac{s_0}{z_0} = -\lg(1-|z_0|^2) + e^{i\vartheta}\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

nur für die Funktion $s^{(\alpha)}(z; z_0, 0)$. Ebenso folgt aus (104)

$$\left|\lg\frac{s_0' z_0}{s_0}\right| \leqq \lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

und es ist

$$\lg\frac{s_0' z_0}{s_0} = e^{i\vartheta}\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

nur für die Funktion $s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0)$. Endlich folgt aus (106)

$$\left|\lg s_0' + \lg(1-|z_0|^2)\right| \leqq 2\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

und es gilt niemals

$$\lg s_0' = -\lg(1-|z_0|^2) + 2e^{i\vartheta}\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \quad \text{mit} \quad \vartheta \neq 0,\ \vartheta \neq \pi.$$

Dagegen gilt

$$\lg s_0' = -\lg(1-|z_0|^2) + 2\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} = \lg\frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}$$

für die Funktion

$$s^{(0)}(z; z_0, 0) \equiv s^{(\infty)}(z; 0, z_0) \tag{107}$$

und nur für diese;

und es gilt $\lg s_0' = -\lg(1-|z_0|^2) - 2\lg\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} = \lg\frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3}$

für die Funktion

(108) $$s^{(\infty)}(z; z_0, 0) \equiv s^{(0)}(z; 0, z_0)$$ und nur für diese.

Wir haben nun noch die Funktionen $s^{(\alpha)}(z; z_1, z_2)$ aufzustellen. Das geschieht gemäß S. 123f., indem wir

(109) $$\sigma^{(\alpha)} = \frac{\zeta^{(\alpha)}}{(1-\zeta^{(\alpha)})^2}$$

als Funktion von z bei $z = 0$ in der vorgeschriebenen Weise normieren; es ist also

(110) $$s^{(\alpha)}(z; z_1, z_2) = c\,(\sigma^{(\alpha)} - c'),$$

wobei $$c' = \sigma^{(\alpha)}(z)\Big|_{z=0}, \quad c = \frac{1}{\sigma^{(\alpha)\prime}(z)}\Big|_{z=0}.$$

Wir müssen die Rechnung für die beiden Fälle $z_2 = 0$, $z_1 = z_0$ und $z_1 = 0$, $z_2 = z_0$ getrennt führen, da im zweiten Fall $z = 0$ Verzweigungspunkt für w ist, im ersten dagegen nicht.

Ist $z_2 = 0$, $z_1 = z_0$, so ist $\zeta^{(\alpha)}(z)\Big|_{z=0} = 0$ und $\sigma^{(\alpha)}(z)\Big|_{z=0} = 0$, und nach (102)

$$\frac{d\zeta^{(\alpha)}}{dz}\Big|_{z=0} = -\frac{1-|z_0|^2}{4z_0}\left(\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\right)^t,$$

und ferner nach (109) $$\frac{d\sigma^{(\alpha)}}{d\zeta^{(\alpha)}}\Big|_{\zeta^{(\alpha)}=0} = 1,$$

also $$c' = 0, \quad c = -\frac{4z_0}{1-|z_0|^2}\left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right)^t.$$

Setzt man diese Werte und (109) in (110) ein und drückt $\zeta^{(\alpha)}$ gemäß (101), (100) und (99) mit $z_2 = 0$, $z_1 = z_0$ durch z aus, so erhält man

(111) $$s^{(\alpha)}(z; z_0, 0) = \frac{4z_0(1+|z_0|)^{2t}z}{(1-\bar{z}_0 z)^{1+t}\left[(w-w_2)(1-\bar{w}_2 w)^t - (w+w_2)(1+\bar{w}_2 w)^t\right]^2}$$

mit $$w = \sqrt{\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z - 1}}, \quad w_2 = \sqrt{z_0}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß tatsächlich eine eindeutige Funktion von z vorliegt. Für $t = 1$ bzw. $t = -1$ findet man

(112) $$s^{(0)}(z; z_0, 0) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}, \quad s^{(\infty)}(z; z_0, 0) = \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2} \quad \left(\varepsilon = \frac{|z_0|}{z_0}\right).$$

Ist dagegen $z_1 = 0$, $z_2 = z_0$, so ist

(113) $$w = \sqrt{z}; \quad w_2 = w_0 = \sqrt{z_0}.$$

Ferner beginnt die Entwicklung von $\zeta^{(\alpha)}$ als Funktion von w bei $w = 0$ so (s. (101)):

$$\zeta^{(\alpha)} = -1 - \frac{2(1+t|w_2|^2)}{w_2}w + \cdots,$$

die von $\sigma^{(\alpha)}$ bei $\zeta^{(\alpha)} = -1$ so (s. (109)):

$$\sigma^{(\alpha)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(\zeta^{(\alpha)} + 1)^2 + \cdots;$$

also ist diesmal

$$(114) \qquad c' = \sigma^{(\alpha)}(z)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{c} = \sigma^{(\alpha)\prime}(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + t|w_2|^2}{w_2}\right)^2.$$

Ersetzt man noch t durch $-t$ und setzt dann (114) und (109) in (110) ein und drückt schließlich wieder vermöge (101) und (113) $\zeta^{(\alpha)}$ als Funktion von z aus, so erhält man

$$(115) \quad s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0) = \frac{z_0}{(1-t|z_0|)^2}\left(\frac{(w-w_0)(1-\overline{w}_0 w)^{-t} + (w+w_0)(1+\overline{w}_0 w)^{-t}}{(w-w_0)(1-\overline{w}_0 w)^{-t} - (w+w_0)(1+\overline{w}_0 w)^{-t}}\right)^2$$

mit $$w = \sqrt{z}, \quad w_0 = \sqrt{z_0}.$$

Offenbar handelt es sich wieder um eine eindeutige Funktion von z. Setzt man wieder $t = -1$ und $t = 1$, so erhält man

$$(116) \qquad s^{(0)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}; \quad s^{(\infty)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2} \quad \left(\varepsilon = \frac{|z_0|}{z_0}\right).$$

In der Tat bestehen also die Identitäten (107) und (108).

Wir haben also folgende Sätze gefunden:

Satz 3. *Wird der Einheitskreis durch eine reguläre Funktion $s(z)$, die bei $z = 0$ durch $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$ normiert ist, schlicht abgebildet, so gilt in jedem Punkt z_0*

$$\left|\lg \frac{s(z_0)}{z_0} + \lg(1 - |z_0|^2)\right| \leqq \lg \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

wobei für $\lg \frac{s(z)}{z}$ der bei $z = 0$ verschwindende Zweig zu nehmen ist[12]*; nur für die Funktion $s^{(\alpha)}(z; z_0, 0)$ (s. (111)) gilt*

$$\lg \frac{s(z_0)}{z_0} = -\lg(1 - |z_0|^2) + t \lg \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \quad \textit{mit} \quad |t| = 1.$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{(1+|z_0|)^2} \leqq \left|\frac{s(z_0)}{z_0}\right| \leqq \frac{1}{(1-|z_0|)^2},$$

und nur von der Funktion

$$s^{(\infty)}(z; z_0, 0) = \frac{z}{\left(1 + \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2}$$

12) Man sieht das, ohne die Abschätzung bis an ihre Wurzel zurückzuverfolgen, da sie ja für $\lg \frac{s(z)}{z}\Big|_{z=0}$ selbst Null ergibt.

wird die untere, nur von der Funktion

$$s^{(0)}(z; z_0, 0) = \frac{z}{\left(1 - \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2}$$

die obere Schranke erreicht.[13])

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt*

$$\left| \lg \frac{s'(z_0) \cdot z_0}{s(z_0)} \right| \leqq \lg \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|},$$

wobei wieder der bei $z = 0$ verschwindende Zweig der Funktion $\lg \frac{s'(z) \cdot z}{s(z)}$ *gemeint ist; nur für die Funktion* $s^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}(z; 0, z_0)$ (s. (115)) *gilt*

$$\lg \frac{s'(z_0) \cdot z_0}{s(z_0)} = t \lg \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \quad \text{mit} \quad |t| = 1.$$

Insbesondere ist

$$\frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|} \leqq \left| \frac{s'(z_0) \cdot z_0}{s(z_0)} \right| \leqq \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|},$$

und die untere Schranke wird nur erreicht bei der Funktion

$$s^{(0)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{\left(1 + \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2},$$

die obere nur bei der Funktion

$$s^{(\infty)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{\left(1 - \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2}.$$

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt*

$$|\lg s'(z_0) + \lg (1 - |z_0|^2)| \leqq 2 \lg \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}, \tag{117}$$

und zwar wieder für den bei $z = 0$ verschwindenden Zweig von $\lg s'(z)$; insbesondere ist

$$\frac{1 - |z_0|}{(1 + |z_0|)^3} \leqq |s'(z_0)| \leqq \frac{1 + |z_0|}{(1 - |z_0|)^3}. \tag{118}$$

Die untere Schranke der letzten Abschätzung wird nur erreicht von der Funktion

$$s^{(\infty)}(z; z_0, 0) \equiv s^{(0)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{\left(1 + \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2},$$

13) Hinsichtlich der zuletzt hervorgehobenen Betragsabschätzung ist das Ergebnis bekannt. Siehe z. B. Bieberbach, Lit.-Verz. (1), S. 78.

die obere nur von der Funktion

$$s^{(0)}(z; z_0, 0) \equiv s^{(\infty)}(z; 0, z_0) = \frac{z}{\left(1 - \frac{|z_0|}{z_0} z\right)^2}.$$

Außer in dem Spezialfall (118) *gilt in* (117) *niemals das Gleichheitszeichen.*[14])

§ 8. Weitere Anwendungen der Hauptformel.

Wir wollen nun unsere allgemeine Formel (I) oder (II) spezialisieren, und zwar für drei verschiedene Typen von in $\mathfrak{B}$ meromorphen Funktionen.

I. enthält die Funktionen $f(\zeta)$, die in $\mathfrak{B}$ eine Nullstelle z und einen Pol z' besitzen, und die auf jedem K_ν die Umlaufszahl Null haben; bei z' seien sie durch die Vorschrift $a' = 1$ normiert.

II. enthält die Funktionen $f(\zeta)$, die in $\mathfrak{B}$ pol- und nullstellenfrei sind, und die auf jedem K_ν die Umlaufszahl Null haben; sie seien in einem bestimmten Punkte z' durch die Forderung $f(z') = a' = 1$ normiert.

III. enthält die Funktionen $f(\zeta)$, die in $\mathfrak{B}$ keinen Pol und eine einzige Nullstelle z besitzen und denen auf K_1 die Umlaufszahl Eins, auf allen anderen eventuell vorhandenen K_ν die Umlaufszahl Null zukommt. Sie seien in einem bestimmten Punkte $z' \neq z$ durch die Forderung $f(z') = a' = 1$ normiert.

Jede der drei Klassen enthält wirklich gewisse Funktionen, z. B. die später aufzustellenden Extremalfunktionen.

Unser Ziel ist, eine für alle Funktionen einer gewissen Klasse, deren Elemente einer jener drei Typen angehören, gültige genaue Abschätzung von L zu gewinnen, d. h. eine solche, für die bei (mindestens) einer Funktion der Klasse das Gleichheitszeichen gilt. Nun hängt aber auch die rechte Seite von (I) im allgemeinen von der speziellen Funktion $f(\zeta)$ ab. Um das genannte Ziel zu erreichen, ist also zu fordern, daß die Funktionen der Klasse hinsichtlich des in (I) rechts stehenden Ausdrucks übereinstimmen, und daß insbesondere auch $\mathfrak{f}(\zeta)$ mit zu dieser Klasse gehöre. Letzteres muß durch geeignete Wahl der Parameter k_λ und $l_\varkappa$ in (39) erreicht werden. Man erhält eine Gleichung für dieselben, indem man fordert, daß die rechte

14) Die Abschätzung (118) stimmt mit dem bekannten Verzerrungssatze, die in (117) enthaltene Abschätzung von amp $s'(z)$ mit dem Bieberbachschen Drehungssatze überein (s. z. B. Bieberbach, Lit.-Verz. (1), S. 77 bzw. 81). Letzterer ist neuerdings von Herrn Kößler verschärft worden (13); doch sind auch die neuen Schranken nicht genau, wie ich an anderer Stelle zeige (Lit.-Verz. (10)).

Seite von (I) unverändert bleibt, wenn man die a durch die entsprechenden $\mathfrak{a}$ ersetzt und dann die $\mathfrak{a}$ durch die Koeffizienten der $\mathfrak{j}_\alpha$ und $\mathfrak{g}$ an den betreffenden Stellen ausdrückt. Ein spezieller Fall dieses Verfahrens liegt vor, wenn man die Parameter $l_\varkappa$ und k_λ so wählt, daß gewisse der auf $f(\zeta)$ in (I) bezüglichen Größen rechts herausfallen. Wir wollen feststellen, wann das für den zu einem gewissen bestimmenden Punkt z_μ gehörigen Koeffizienten a_μ von $f(\zeta)$ überhaupt möglich ist. Es ist dafür zweckmäßiger, die spezielle Darstellung (43) von $\mathfrak{f}(\zeta)$ und dementsprechend (II) zugrunde zu legen. Es muß dann gelten

$$l_{\mu 0} - l_{\mu\infty} = l_{\mu 1} = 0.$$

Da nicht $l_{\mu 0} = l_{\mu 1} = l_{\mu\infty} = 0$ sein darf, wenn z_μ überhaupt noch bestimmender Punkt für $\mathfrak{f}(\zeta)$ sein soll, so muß

$$l_{\mu 0} + l_{\mu 1} + l_{\mu\infty} \neq 0$$

sein, d. h. z_μ ist entweder Pol oder Nullstelle für $\mathfrak{f}(\zeta)$ und also auch für $f(\zeta)$.

Eine andere Spezialisierung des Verfahrens, das die Zugehörigkeit von $f(\zeta)$ und $\mathfrak{f}(\zeta)$ zu einer und derselben Klasse durch geeignete Wahl der Parameter in (39) bzw. (43) herbeiführen soll, ist die, diese Parameter so zu wählen, daß die in (I) bzw. (II) rechts auftretenden Koeffizienten $\mathfrak{a}$ einzeln mit den entsprechenden a übereinstimmen. Natürlich lassen sich beide Verfahren kombinieren, indem man für einen Teil der in (I) bzw. (II) stehenden $\lg |a|$ und $\operatorname{amp} a$ das eine, für einen Teil das andere Verfahren heranzieht.

Wir wenden uns zuerst den Funktionen des Typus I zu. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, $\mathfrak{B}$ sei ein Bereich, der die Punkte Null und Unendlich enthält, ferner, daß die zu untersuchenden Abbildungsfunktionen diese Punkte fest lassen und bei Unendlich die Ableitung Eins besitzen. Wenn wir bei den Funktionen $\mathfrak{j}_\alpha$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ das zweite und dritte Argument weglassen, so sind dies stets die Werte Null und Unendlich.

Wir setzen

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = l_0 \lg \mathfrak{j}_0(\zeta) + l_1 \lg \mathfrak{j}_1(\zeta) + l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta),$$

wobei $$l_0 + l_1 + l_\infty = 1$$ sein muß

und l_0, l_1, l_∞ als reell vorausgesetzt werden dürfen. $\mathfrak{f}(\zeta)$ ist eine wohlbestimmte Funktion, wenn wir fordern $\mathfrak{a}' = \mathfrak{f}'(\infty) = 1$. In der der Formel (11) zugrunde liegenden Form (43) geschrieben, ist

$$\begin{aligned}\lg \mathfrak{f}(\zeta) = {} & l_0 \lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, \infty) + l_1 \lg \mathfrak{j}_1(\zeta; z_0, \infty) + l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, \infty) \\ & - l_0 \lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, 0) - l_1 \lg \mathfrak{j}_1(\zeta; z_0, 0) - l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, 0) + \lg C'.\end{aligned}$$

Wir setzen noch $l = l_0 - l_\infty$.

Dann sind l und l_1 frei verfügbare Konstanten, und es ist

$$l_0 = \frac{1 + l - l_1}{2}, \quad l_\infty = \frac{1 - l - l_1}{2}.$$

Unter Verwendung der Funktionen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ können wir wegen (15) auch schreiben

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = \lg \mathfrak{p}(\zeta) + (l + i l_1) \lg \mathfrak{q}(\zeta).$$

Es ist also (s. (81))

$$\lg \mathfrak{a} = \lg \mathfrak{p} + (l + i l_1) \lg q$$

$$\lg |\mathfrak{a}| = \lg |\mathfrak{p}| + l \lg q; \quad \operatorname{amp} \mathfrak{a} = \operatorname{amp} \mathfrak{p} + l_1 \operatorname{amp} q.$$

Ferner ist hier zu setzen

$$\mathfrak{f}^0(\zeta) = \mathfrak{j}_\infty(\zeta), \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{a}^0 = j_\infty, \quad \mathfrak{a}^{0\prime} = 1.$$

Aus (II) erhalten wir mit Rücksicht auf die Normiernng von $f(\zeta)$, $\mathfrak{f}(\zeta)$ und $\mathfrak{f}^0(\zeta)$ bei $\zeta = \infty$

$$L \geqq -l \lg |a| + \frac{1 + l}{2} \lg |\mathfrak{a}| - \frac{1 - l}{2} \lg |j_\infty|$$

$$- l_1 \operatorname{amp} a + \frac{l_1}{2} \operatorname{amp} \mathfrak{a} + \frac{l_1}{2} \operatorname{amp} j_\infty.$$

Hier können wir gemäß dem zu Anfang des Paragraphen Ausgeführten l und l_1 so wählen, daß

a) $\lg |a|$ und $\operatorname{amp} a$ herausfallen.

b) $\operatorname{amp} a$ herausfällt und $\lg |\mathfrak{a}| = \lg |a|$ wird.

c) $\lg |a|$ herausfällt und $\operatorname{amp} \mathfrak{a} = \operatorname{amp} a$ wird.

d) $\lg |\mathfrak{a}| = \lg |a|$ und $\operatorname{amp} \mathfrak{a} = \operatorname{amp} a$.

Zu a): Es ist $l = l_1 = 0$ zu setzen, und man erhält $\lg \mathfrak{a} = \lg \mathfrak{p}$ und damit (S. 119)

$$L \geqq \frac{1}{2} \lg |\mathfrak{a}| - \frac{1}{2} \lg |j_\infty| = \frac{1}{4} \lg \frac{j_0}{j_\infty} = \frac{1}{2} \lg q,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta).$$

Zu b): Es ist zu setzen $l_1 = 0$, $l = \dfrac{\lg \left| \dfrac{a}{\mathfrak{p}} \right|}{\lg q}$,

und man findet $$L \geqq \frac{\lg \left| \dfrac{j_0}{a} \right| \cdot \lg \left| \dfrac{a}{j_\infty} \right|}{\lg \dfrac{j_0}{j_\infty}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^l.$$

Zu c): Hier haben wir $l = 0$, $l_1 = \dfrac{\operatorname{amp}\frac{a}{p}}{\lg q}$ zu setzen

und finden $$L \geqq \frac{1}{4} \lg \frac{j_0}{j_\infty} - \frac{\left(\operatorname{amp}\frac{a}{j_\infty}\right)^2}{\lg \frac{j_0}{j_\infty}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^{i l_1}.$$

Zu d): Die Forderung ergibt

$$l = \frac{\lg\left|\frac{a}{p}\right|}{\lg q}, \quad l_1 = \frac{\operatorname{amp}\frac{a}{p}}{\lg q},$$

und man findet $$L \geqq \frac{\lg\left|\frac{j_0}{a}\right| \cdot \lg\left|\frac{a}{j_\infty}\right| - \left(\operatorname{amp}\frac{a}{j_\infty}\right)^2}{\lg \frac{j_0}{j_\infty}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^{l + i l_1}.$$

Die Abschätzung a) bezieht sich auf *alle* Funktionen des Typus I, b) auf diejenigen mit fester Verzerrung $|a|$, c) auf die mit fester Drehung amp a und d) auf die mit fester Ableitung a im Nullpunkt.

Bei den Funktionen des Typus II ist es sinnvoller, statt $f(\zeta)$ die Funktion $h(\zeta) = \lg f(\zeta)$ zu betrachten, die ja wieder regulär und eindeutig in $\mathfrak{B}$ ist. $2\pi L$ ist dann der Flächeninhalt des durch $h(\zeta)$ entworfenen Bereiches. z und z' seien die einzigen bestimmenden Punkte für $\mathfrak{f}(\zeta)$. Wegen der Normierung von $f(\zeta)$ bei z' ist $h(z') = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir noch annehmen, daß $\lg f(z) = h(z) = \lg a = b$ reell ist. Setzen wir nun

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = \frac{b}{\lg q} \lg \mathfrak{q}(\zeta; z, z')$$

$$= \frac{b}{2 \lg q} (\lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, z') - \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z') - \lg \mathfrak{j}_0(\zeta; z_0, z) + \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta; z_0, z) + \lg C'),$$

so verfahren wir nach der zweiten der oben genannten Möglichkeiten, um die Zugehörigkeit von $\mathfrak{f}(\zeta)$ zur selben Klasse wie $f(\zeta)$ zu erreichen. Die Voraussetzung eines reellen b hat zur Folge, daß in der Darstellung von $\mathfrak{f}(\zeta)$ in der Form (43) keine $\mathfrak{j}_1(\zeta)$ vorkommen. Aus (II) ergibt sich

$$L \geqq \frac{b^2}{-2 \lg q}.$$

So erhalten wir den

Satz 6.[15]) *Unter allen in einem beliebigen, endlich vielfach zusammenhängenden Bereich regulären und eindeutigen Funktionen, die in einem festen Punkt z' verschwinden und in einem anderen, z, den vorgegebenen Wert b annehmen, liefert den kleinsten Wert für den Flächeninhalt des Bildbereiches die Funktion (vgl. § 1)*

$$\frac{b}{\lg q} \lg \mathfrak{q}(\zeta; z, z'),$$

nämlich den Wert $$\pi \frac{|b|^2}{-\lg q}.$$

Legt man als $\mathfrak{B}$ den Einheitskreis zugrunde, so ist $\mathfrak{q}$ durch (23) explizit gegeben. Aus dieser Formel findet man, wenn man noch $z' = 0$ setzt, $q = 1 - |z|^2$. Läßt man $z \to 0$ gehen, so folgt der erste Bieberbachsche Flächensatz[16]).

Wir geben noch einige Anmerkungen zum geometrischen Charakter der seither in diesem Paragraphen aufgetretenen Extremalfunktionen für einfach zusammenhängendes $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{q}(\zeta)$ bildet auf einen Kreis ab, für den die Punkte Null und Unendlich außerhalb liegen. Das logarithmische Bild des Randes eines solchen Kreises ist unter dem Namen Sumnersche Linie erster Art bekannt. Es ist dies eine einfach geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umschließt.[17])

Die Extremalfunktionen bei dem Typus II sind allgemein von der Form

$$\mathfrak{f}(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta)\,\mathfrak{q}(\zeta)^{\lambda}$$

bei beliebigem komplexen λ. Wir wollen weiterhin die Verhältnisse zugrunde legen, unter denen wir die Formeln (30)—(32) aufgestellt hatten. Wir wissen schon, daß, falls $|\lambda| = 1$, $\mathfrak{f}(\zeta)$ auf einen Bereich $\mathfrak{B}_a$ abbildet (S. 100 f.). Andernfalls geht, wie wir zeigen wollen, der Rand in eine einfach geschlossene Kurve über. Setzen wir nämlich

$$\omega = \lg \mathfrak{f}(\zeta), \quad w = \lg \zeta,$$

so ist auf dem Rande von $\mathfrak{B}$, wenn wir uns jeweils auf einen bestimmten Wert des Logarithmus beschränken (S. 102)

$$\lg \mathfrak{p} = w, \quad \lg \mathfrak{q} = \bar{w},$$

---

15) Vgl. Kubota, Lit.-Verz. (3), wo sich derselbe Satz für einfach zusammenhängende Bereiche findet.

16) Vgl. Lit.-Verz. (2)

17) Vgl. G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven*, 2. Bd., 2. Aufl. (1911) S. 186.

also mit $$\lambda = |\lambda| e^{i\gamma}$$

$$\omega = w + |\lambda| e^{i\gamma} \overline{w} = e^{i\frac{\gamma}{2}} \left(e^{-i\frac{\gamma}{2}} w + |\lambda| e^{i\frac{\gamma}{2}} \overline{w} \right)$$

oder, wenn wir

(119) $$\mathfrak{w} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v} = e^{-i\frac{\gamma}{2}} w$$ setzen,

(120) $$\omega = e^{i\frac{\gamma}{2}} (\mathfrak{w} + |\lambda| \overline{\mathfrak{w}}) = e^{i\frac{\gamma}{2}} ((1 + |\lambda|)\mathfrak{u} + i(1 - |\lambda|)\mathfrak{v}).$$

Das Bild des Randes in der w-Ebene, K_w, ist eine SUMNERsche Linie erster Art (S. 135), also eine einfach geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umschlingt. Bei den durch (119) und (120) dargestellten Prozessen bleiben diese Eigenschaften erhalten, falls $|\lambda| \neq 1$; und zwar durchläuft ein Punkt auf der Bildkurve in der ω-Ebene den Nullpunkt im gleichen oder im entgegengesetzten Sinn wie der entsprechende Punkt auf K_w, je nachdem, ob $|\lambda| < 0$ oder $|\lambda| > 0$ ist. Damit ist die auf S. 135 aufgestellte Behauptung bewiesen, und darüber hinaus, daß ein Punkt im Innern der Kurve, die $\mathfrak{f}(\zeta)$ vom Rande entwirft, überhaupt nicht oder zweimal bedeckt wird, je nachdem, ob $|\lambda| < 1$ oder $|\lambda| > 1$ ist; d. h. die Abbildung $\mathfrak{f}(\zeta)$ ist dann und nur dann schlicht, wenn $|\lambda| \leqq 1$ ist.

Wir kommen zu den Funktionen des Typus III. Wieder setzen wir voraus, $\mathfrak{B}$ sei schon ein Bereich, wie er für Funktionen dieses Typus als Bildbereich auftritt, so daß also insbesondere $z = 0$, $z' = 1$ ist. Wir setzen

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = \lg (c \cdot \mathfrak{g}(\zeta)) + l_0 \lg \mathfrak{j}_0(\zeta) + l_1 \lg \mathfrak{j}_1(\zeta) + l_\infty \lg \mathfrak{j}_\infty(\zeta)$$

mit $$l_0 + l_1 + l_\infty = 0.$$

Das zweite Argument von $\mathfrak{g}$ und den $\mathfrak{j}_\alpha$ ist natürlich 0, das dritte der $\mathfrak{j}_\alpha$ ist 1; $\mathfrak{g}$ besitze auf K_1 die Umlaufszahl Eins, auf allen anderen K_ν die Umlaufszahl Null. c dient zur Normierung, ist also gleich $\frac{1}{\mathfrak{g}(1;0)}$ zu setzen. Wenn wir noch $\mathfrak{f}'(0) = 1$ vorschreiben, so ist $\mathfrak{f}(\zeta)$ eine wohlbestimmte Funktion. Ferner setzen wir wieder

$$l = l_0 - l_\infty;$$

dann ist $$l_0 = \frac{l - l_1}{2}, \quad l_\infty = \frac{-l - l_1}{2};$$

dann können wir $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ auch in der Form schreiben

$$\lg \mathfrak{f}(\zeta) = \lg (c \cdot \mathfrak{g}(\zeta)) + (l + i l_1) \lg \mathfrak{q}(\zeta).$$

Ferner ist hier $$\mathfrak{f}^0(\zeta) = c \cdot \mathfrak{g}(\zeta).$$

Aus (II) folgt dann, falls wir wieder $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ auf die Form (43) bringen, und die Normierung von $f(\zeta)$, $\mathfrak{f}(\zeta)$ und $\mathfrak{f}^0(\zeta)$ bei z' beachten,

$$L \geqq (1-l)\lg|a| + \frac{l}{2}|\mathfrak{a}| - \left(1-\frac{l}{2}\right)\lg|\mathfrak{a}^0| \tag{121}$$
$$- l_1 \operatorname{amp} a + \frac{l_1}{2}\operatorname{amp}\mathfrak{a} + \frac{l_1}{2}\operatorname{amp}\mathfrak{a}^0 + \lg \mathfrak{r}_1^0.$$

Hier ist $a = f'(0)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}'(0)$, $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{f}^{0\prime}(0) = \frac{1}{\mathfrak{g}(1;0)}$ und $\mathfrak{r}_1^0$ der Betrag von $\mathfrak{f}^0(\zeta)$ auf K_1.

Wieder können wir l und l_1 gemäß den vier auf S. 133 gegebenen Anweisungen wählen. Man erhält

a) $$l = 1, \quad l_1 = 0,$$
$$L \geqq \tfrac{1}{2}\lg q + \lg \mathfrak{r}_1^0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = c \cdot \mathfrak{g}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta).$$

b) $$l = \frac{\lg\left|\frac{a}{c}\right|}{\lg q}, \quad l_1 = 0,$$
$$L \geqq \frac{\lg\frac{|a|}{|c|\cdot q^2}\cdot\lg\left|\frac{a}{c}\right|}{-\lg q^2} + \lg \mathfrak{r}_1^0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = c \cdot \mathfrak{g}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^l.$$

c) $$l = 1, \quad l_1 = \frac{\operatorname{amp}\frac{a}{c}}{\lg q},$$
$$L \geqq \frac{\left(\operatorname{amp}\frac{a}{c}\right)^2}{-\lg q^2} + \lg \mathfrak{r}_1^0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = c \cdot \mathfrak{g}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^{i l_1}.$$

d) $$l = \frac{\lg\left|\frac{a}{c}\right|}{\lg q}, \quad l_1 = \frac{\operatorname{amp}\frac{a}{c}}{\lg q},$$
$$L \geqq \frac{\lg\frac{|a|}{|c|\cdot q^2}\cdot\lg\left|\frac{a}{c}\right| + \left(\operatorname{amp}\frac{a}{c}\right)^2}{-\lg q^2} + \lg \mathfrak{r}_1^0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$f(\zeta) = c \cdot \mathfrak{g}(\zeta) \cdot \mathfrak{q}(\zeta)^{l + i l_1}.$$

Schließlich können wir auch

$$l_0 = l_1 = l_\infty = 0$$

setzen. Dann ist Eins nicht mehr bestimmender Punkt für $\mathfrak{f}(\zeta)$, was natürlich der Gültigkeit von (121) keinen Abbruch tut. Es folgt

$$L \geqq \lg \left| \frac{a}{a^0} \right| + \lg r_1^0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktionen

$$c \cdot \mathfrak{g}(\zeta),$$

wobei c jetzt eine beliebige Konstante ist. Wir können dieses Ergebnis so aussprechen:

Satz 7. *Wird der möglicherweise längs gewisser Kreisbogen um den Nullpunkt aufgeschlitzte Einheitskreis durch eine eindeutige reguläre Funktion $f(\zeta)$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ abgebildet, und ist außerdem die Umlaufszahl von $f(\zeta)$ auf $|\zeta| = 1$ gleich Eins, auf allen Schlitzen dagegen gleich Null, so ist das geometrische Mittel des Abstandes der Randpunkte vom Nullpunkt im Bildbereich mindestens gleich Eins, und gleich Eins nur, wenn $f(\zeta) = \zeta$.*[18])

Dieser Satz enthält in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des ersten BIEBERBACHschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Bereiche, und gleichzeitig eine Verschärfung desselben, falls dieser für schlichte Konkurrenzbereiche ausgesprochen wird. Er besagt dann: Unter allen schlichten Bereichen, die aus dem Einheitskreis durch eine Abbildung $f(\zeta)$ hervorgehen, die bei $\zeta = 0$ durch $|f'(0)| = 1$ normiert ist, besitzt der Einheitskreis selbst den kleinsten Flächeninhalt. Um eine Verschärfung dieses Satzes handelt es sich bei uns im Hinblick auf den in § 5 auseinandergesetzten Vergleich von L mit dem Inhalt des Bildbereichs.

Aber auch die genannte Verallgemeinerung liegt vor. Zwar befinden sich unter den in unserem Satz zur Konkurrenz zugelassenen Abbildungen nicht alle schlichten normierten. Bei einer beliebigen solchen kann irgendeine Randkurve in eine der Umlaufszahl Eins um den Nullpunkt übergehen, während die Bilder aller anderen dann die Umlaufszahl Null besitzen müssen. Wir betrachten nun zunächst diejenige bei $\zeta = 0$ durch $f_\nu(0) = 0$, $f_\nu'(0) = 1$ normierte schlichte Abbildung $f_\nu(\zeta)$, bei der die Randkomponente K_ν des Originalbereiches

18) Hier ist der Begriff des Mittels in dem in § 5 erläuterten verallgemeinerten Sinne zu verstehen.

aus Satz 7 in einen Kreis um den Nullpunkt, die anderen Randkomponenten in konzentrische Schlitze übergehen. $\mathfrak{K}_\nu$ sei der zugehörige Bildbereich. Einer unter diesen $\mathfrak{K}_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ — er heiße $\mathfrak{K}_N$ — besitzt den kleinsten L-Wert. (Besitzen ihn mehrere zugleich, so nennen wir irgendeinen von ihnen $\mathfrak{K}_N$.) Die Gesamtheit der schlichten, durch $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normierten Abbildungen $f(\zeta)$ von $\mathfrak{K}_N$ ist nun enthalten unter denjenigen, die man bekommt, wenn man zunächst auf ein beliebiges $\mathfrak{K}_\nu$ abbildet und diesen Bereich dann weiterhin so, daß die Umlaufszahl jeder Randkomponente um Null erhalten bleibt. Beim ersten Schritt wird L nicht verkleinert, beim zweiten, falls er nicht die identische Abbildung, gemäß Satz 7 vergrößert. Unentschieden bleibt nur, welche unter den Bereichen $\mathfrak{K}_\nu$ diejenigen kleinsten L-Wertes sind.

Schlußbemerkungen.

Es ist wohl deutlich, daß die in Vorstehendem verwendeten Methoden noch zur Herleitung weiterer ähnlicher Ergebnisse geeignet sind. Abgesehen von ferneren Spezialisierungen der allgemeinen Formel (I) oder (II), ähnlich denen in § 8, die nicht viel Interesse beanspruchen können, besteht z. B. folgende Möglichkeit:

Anstatt, wie dies in der vorliegenden Arbeit geschehen ist, Funktionen mit logarithmischen Singularitäten zu betrachten (es war ja in § 4 immer die Funktion $\lg f(\zeta)$, mit der wir es zu tun hatten), kann man solche mit Polen erster oder höherer Ordnung untersuchen. Man kommt auf diese Weise insbesondere direkt zu den Bieberbachschen Flächensätzen und deren Verallgemeinernng für mehrfach zusammenhängende Bereiche. In dieser Hinsicht seien ohne Beweis nur die beiden folgenden Resultate genannt:

Mit $\mathfrak{x}(\zeta; z)$ bezeichnen wir diejenige Funktion, die den endlich vielfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ der ζ-Ebene auf einen von geradlinigen Schlitzen parallel zur reellen Achse begrenzten Bereich abbildet, so daß z in Unendlich übergeht, und der erste Laurent-Koeffizient gleich Eins ist; mit $\mathfrak{y}(\zeta; z)$ die Funktion mit denselben Eigenschaften, nur daß die Schlitze ihres Bildbereiches der imaginären Achse parallel sind.[19]) Dann bildet die Funktion

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}(\zeta; z) + \mathfrak{y}(\zeta; z))$$

$\mathfrak{B}$ ebenfalls so ab, daß die Umgebung von z in eine schlichte Umgebung von Unendlich übergeht mit derselben Normierung wie $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$.

19) Vgl. Koebe, Lit.-Verz. (12) S. 329—331.

Diese Abbildung liefert unter allen so normierten den größten Flächeninhalt für die Summe der Komplementärbereiche des Bildbereichs (wobei für nichtschlichte Abbildungen dieser Flächeninhalt geeignet definiert werden muß).

Ferner ist die Funktion

$$c(\mathfrak{x}(\zeta; z) - \mathfrak{y}(\zeta; z))$$

überall in $\mathfrak{B}$ regulär. Die Konstante c wählen wir so, daß die Ableitung dieser Funktion bei z den Wert Eins besitzt. Dann liefert sie unter allen ebenso normierten Funktionen den kleinsten Flächeninhalt des Bildbereiches.

Endlich sei noch auf die Verwandtschaft der in den §§ 2—4 entwickelten Formeln mit solchen aus der Analysis der unendlich vielen Veränderlichen hingewiesen. Die linke Seite der Formel (36) z. B. läßt sich auffassen als inneres Produkt zwischen den Funktionen $F(\zeta)$ und $\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta)$ und die Abschätzung (I) ist dann nichts anderes als die BESSELsche Ungleichung für die Funktion $\lg f(\zeta)$ in bezug auf das zum Aufbau von $\lg \mathfrak{f}(\zeta)$ verwendete Funktionssystem der $\lg \mathfrak{g}(\zeta)$ und $\lg \mathfrak{j}_\alpha(\zeta)$. Was bei dieser Anwendung der Analysis der unendlich vielen Veränderlichen zu den allgemeinen Gesichtspunkten neu hinzukommt, ist einmal die Deutung des inneren Produktes einer Funktion mit sich selbst als ein gewisser Flächeninhalt, und ferner die in den Formeln (33) und (36) gegebene Auswertung des inneren Produktes einer beliebigen in $\mathfrak{B}$ regulären und eindeutigen Funktion $F(\zeta)$ mit gewissen speziellen Funktionen durch gewisse spezielle Werte von $F(\zeta)$. Ich muß mich hier mit diesen Andeutungen begnügen, da für Weiteres ein entsprechender Formelapparat nötig wäre.[20])

Auf die hier erwähnten Erweiterungen beabsichtige ich später zurückzukommen.

---

20) Eine Einführung der Analysis der unendlich vielen Veränderlichen in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen wurde schon von den Herren G. Szegö (Math. Zeitschr. 9 [1921], 218—270), S. Bergmann (Math. Ann. 86 [1922], 238—279) und S. Bochner (Math. Zeitschr. 14 [1922], 180—207) unternommen.

Lebenslauf.

Ich, Helmut Grunsky, wurde am 11. Juli 1904 als Sohn des Professors Heinrich Grunsky und seiner Frau Lydia geb. Stahl zu Aalen in Württemberg geboren. Von Herbst 1910 bis Sommer 1912 besuchte ich die Volksschule, darauf das Reformrealgymnasium meiner Vaterstadt, das ich im Frühjahr 1922 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Krankheitshalber konnte ich mein Studium erst im Herbst 1922 aufnehmen. Bis zum Sommersemester 1925 studierte ich an der Technischen Hochschule zu Stuttgart technische Physik, mit Unterbrechung im Sommersemester 1924, das ich der vorgeschriebenen Werkstattpraxis widmete. Ab Herbst 1925 studierte ich an der Technischen Hochschule zu Berlin, an der ich im Wintersemester 1927/28 die Diplomprüfung in Fachrichtung Physik ablegte. Darauf wandte ich mich dem Studium der Mathematik an der Universität Berlin zu. Am 23. Januar 1929 starb plötzlich mein lieber Vater. Seit November 1930 bin ich als ständiger Mitarbeiter beim Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik beschäftigt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Baumgardt, Becker, Bieberbach, Cranz, Drach, Egelhaaf, Emde, Ewald, Feigl, Friedländer, Fues, Giese, Glocker, Grammel, Hamel, Hammerstein, Häbich, J. Herrmann, Hettner, H. Hopf, Jacobsthal, Köhler, Köstlin, Kutta, Laue, Liebert, Heinrich Maier, Meyer, Neumann von Margitta, Paschen, Petzoldt, Pfeiffer, Planck, Regener, Reichenbach, Rothe, Scheffers, Erhard Schmidt, Julius Schmidt, Schlee, Schrödinger, I. Schur, Veesenmeyer, Volmer, Weidert, Wilke-Dörfurt, Wunderlich.

Besonderen Dank schulde ich den Herren Prof. Bieberbach, Geheimrat Cranz und Prof. Schur. Insbesondere wurde die vorliegende Arbeit durch zahlreiche wertvolle Ratschläge von Herrn Prof. Bieberbach in hohem Maße gefördert.